COMPITO di ANALISI MATEMATICA 9/2/2021

I M 1) Siano dati due numeri complessi z_1 e z_2 che, posti in forma trigonometrica, hanno moduli uguali rispettivamente a 4 e $\frac{1}{2}$, ed argomenti rispettivamente uguali a $\frac{17}{5}\pi$ e $\frac{23}{20}\pi$. Si calcolino le radici cubiche del loro quoziente $\frac{z_1}{z_2}$.

Avremo quindi :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4\left(\cos\frac{17\pi}{5} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{5}\right)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{23\pi}{20}\right)} = 8\left(\cos\left(\frac{17\pi}{5} - \frac{23\pi}{20}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{17\pi}{5} - \frac{23\pi}{20}\right)\right) =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 8\left(\cos\frac{45\pi}{20} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{45\pi}{20}\right) = 8\left(\cos\frac{9\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{9\pi}{4}\right).$$ Quindi:

$$\sqrt[3]{\frac{z_1}{z_2}} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2\,.$$

Se $k = 0 : 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,;$

Se $k = 1 : 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{17\pi}{12}\right) =$

$= -\sqrt{2-\sqrt{3}} - i\sqrt{2+\sqrt{3}}\,;$

Se $k = 2 : 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\cos\frac{25\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{25\pi}{12}\right) =$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\,.$

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - x & : (x,y) \neq (0,0) \\ k & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare l'opportuno valore di k che rende la funzione continua nel punto $(0,0)$, e determinare poi se in tale punto risulta anche differenziabile.

Intanto risulta: $\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} - x = \dfrac{x^2y^2 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2}$. Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\left(\varrho\cos^2\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta - \cos^3\vartheta - \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right)}{\varrho^2} =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0} \varrho\cos\vartheta\left(\varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta - 1\right) = 0\,.$$

La convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho\cos\vartheta\left(\varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta - 1\right)\right| \le \varrho\,(\varrho + 1)\,.$

Quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - h^3 - 0}{h^2 + 0}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^3}{h^3} = -1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 - 0 - 0}{0 + h^2}\cdot\frac{1}{h} = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (-1, 0)\,.$

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0$ ovvero se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^2y^2-x^3-xy^2}{x^2+y^2}+x\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2-x^3-xy^2+x^3+xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

ovvero se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

Passando a coordinate polari si ha: $\lim_{\varrho\to0}\dfrac{\varrho^4\cos^2\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^3}=\lim_{\varrho\to0}\varrho\cos^2\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta=0$, e la convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho\cos^2\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta\right|\le\varrho$.
Quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Il sistema di equazioni $\begin{cases} x+e^{z-xy}=y \\ x^2+y^2-z^2=e^{xyz}\end{cases}$, soddisfatto nel punto $(0,1,0)$, definisce implicitamente una funzione $x\to(y(x),z(x))$. Determinare se esiste il vettore tangente a tale curva nel punto opportuno.

Vediamo il sistema come $\begin{cases} f(x,y,z)=x+e^{z-xy}-y=0 \\ g(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-e^{xyz}=0\end{cases}$ con $\begin{cases} f(0,1,0)=0 \\ g(0,1,0)=0\end{cases}$.

Risulta poi: $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}=\left\|\begin{matrix} 1-y\,e^{z-xy} & -x\,e^{z-xy}-1 & e^{z-xy} \\ 2x-yz\,e^{xyz} & 2y-xz\,e^{xyz} & -2z-xy\,e^{xyz}\end{matrix}\right\|$ per cui:

$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(0,1,0)=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0\end{matrix}\right\|$. Dato che $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\neq0$ il sistema definisce implicitamente una curva $x\to(y(x),z(x))$. Risulta quindi:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0\end{vmatrix}}=0$ e $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0\end{vmatrix}}=0$. Quindi $(y'(0),z'(0))=(0,0)$ e quindi non esiste il vettore tangente nel punto $x=0$.

I M 4) Data la funzione $z=\text{sen}\,(x-y)$, determinare tutti i punti nei quali il gradiente della funzione ha modulo massimo e tutti i punti nei quali ha modulo minimo.

La funzione $z=\text{sen}\,(x-y)$ è differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$: Si ha poi:
$\nabla f(x,y)=(\cos\,(x-y);\,-\cos\,(x-y))$ per cui :
$\|\nabla f(x,y)\|=\sqrt{\cos^2\,(x-y)+\cos^2\,(x-y)}=\sqrt{2\cos^2\,(x-y)}$.
Quindi $\|\nabla f(x,y)\|$ risulta massimo se $\cos^2\,(x-y)=1$ ovvero se $\cos\,(x-y)=\pm1$ ovvero se $x-y=0$ o se $x-y=\pi$ e quindi, più in generale, se $x-y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Invece $\|\nabla f(x,y)\|$ risulta minimo se $\cos^2\,(x-y)=0$ ovvero se $\cos\,(x-y)=0$ ovvero se $x-y=\dfrac{\pi}{2}$ o se $x-y=\dfrac{3\pi}{2}$ e quindi, più in generale, se $x-y=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=2x^2+y^2 \\ \text{s.v.}: x^2+2y^2\le1\end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ (ellisse) che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Per risolvere il problema utilizziamo le condizioni di Kuhn-Tucker.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = 2x^2 + y^2 \\ \text{s.v. : } x^2 + 2y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$.

Formiamo la funzione Lagrangiana:

$\Lambda(x,y,\lambda) = 2x^2 + y^2 - \lambda\big(x^2 + 2y^2 - 1\big)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = 4x = 0 \\ \Lambda'_y = 2y = 0 \\ x^2 + 2y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 + 0 \leq 1 \end{cases}$; $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ e quindi $(0,0)$ è un punto di minimo interno alla regione ammissibile.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = 4x - 2\lambda x = 2x\,(2-\lambda) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - 4\lambda y = 2y\,(1-2\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 + 0 = 1 \text{ impossibile} \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ \text{impossibile} \end{cases}$ oppure

$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x\,(2-\lambda) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y\,(1-2\lambda) = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ \lambda = 2 \\ x^2 = 1 \end{cases}$ da cui le quattro soluzioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = 2 \end{cases}.$$

Essendo il valore dei λ positivo, questi punti potrebbero essere di massimo.

Vista la presenza di un solo vincolo, possiamo controllare la natura di questi punti utilizzando la matrice Hessiana orlata.

Risulta $\overline{\mathbb{H}}(x,y,\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 2x & 4y \\ 2x & 4-2\lambda & 0 \\ 4y & 0 & 2-4\lambda \end{Vmatrix}$. E quindi:

$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 3\,(-8) < 0$ quindi il punto verrebbe segnalato come punto di minimo mentre il moltiplicatore lo segnala come un punto di massimo. Quindi $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ non è nè punto di massimo nè di minimo.

$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 3 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 3\,(-8) < 0$

quindi il punto verrebbe segnalato come punto di minimo mentre il moltiplicatore lo segnala come un punto di massimo. Quindi $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ non è nè punto di massimo nè di minimo.

$\left|\overline{\mathbb{H}}(1,0,2)\right| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (-6)(-4) > 0$ quindi il punto viene segnalato come punto di massimo come segnalato dal moltiplicatore. Quindi $(1,0,2)$ è punto di massimo.

$\left|\overline{\mathbb{H}}(-1,0,2)\right| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = (-6)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (-6)(-4) > 0$ quindi il punto viene segnalato come punto di massimo come segnalato dal moltiplicatore. Quindi $(-1,0,2)$ è punto di massimo.

In conclusione, $(0,0)$ è il punto di minimo con $f(0,0)=0$ mentre $(1,0)$ e $(-1,0)$ sono i punti di massimo con $f(1,0)=f(-1,0)=2$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y\,y' = x\,(1+y^2)\,e^x \\ y(0)=1 \end{cases}$.

Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili. Avremo quindi:

$y\,y' = x\left(1+y^2\right)e^x \Rightarrow \dfrac{y}{1+y^2}\,y' = x\,e^x$ da cui passando alle primitive:

$\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2}\,\mathrm{d}y = \int x\,e^x\,\mathrm{d}x + k \Rightarrow \frac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) = x\,e^x - \int 1\cdot e^x\,\mathrm{d}x + k \Rightarrow$

$\dfrac{1}{2}\log\left(1+y^2\right) = x\,e^x - e^x + k = e^x\,(x-1) + k \Rightarrow$

$\Rightarrow \log\left(1+y^2\right) = 2e^x\,(x-1) + 2k \Rightarrow 1+y^2 = e^{2e^x\,(x-1)+2k} = m\,e^{2e^x\,(x-1)}$

avendo posto $m = e^{2k}$. Da cui poi:

$y^2 = m\,e^{2e^x\,(x-1)} - 1$ e quindi $y = \pm\sqrt{m\,e^{2e^x\,(x-1)} - 1}$.

Ponendo $y(0)=1$, scegliamo la soluzione positiva ed avremo:

$y(0) = \sqrt{m\,e^{-2} - 1} = 1 \Rightarrow m\,e^{-2} - 1 = 1 \Rightarrow m = 2\,e^2$ da cui la soluzione:

$y = \sqrt{2\,e^{2e^x\,(x-1)+2} - 1}$.

II M 3) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x+y \\ y' = 2x \end{cases}$, determinando poi la soluzione che soddisfa alla condizione $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$.

$\begin{cases} x' = x+y \\ y' = 2x \end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix} D-1 & -1 \\ -2 & D \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right\| \Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -2 & D \end{vmatrix}(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(D^2 - D - 2\right)(x) = x'' - x' - 2x = 0$.

Da $x'' - x' - 2x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2) = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t}$.

Dalla prima equazione ricaviamo $y = x' - x$ e quindi:

$y(t) = -c_1\,e^{-t} + 2c_2\,e^{2t} - c_1\,e^{-t} - c_2\,e^{2t}$ da cui $y(t) = -2c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t}$.

Quindi la soluzione generale $\begin{cases} x(t) = c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t} \\ y(t) = -2c_1\,e^{-t} + c_2\,e^{2t} \end{cases}$. Da $\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ otteniamo:

$\begin{cases} x(0) = c_1 + c_2 \ = 0 \\ y(0) = \ - 2c_1 + c_2 \ = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \ = \ - c_2 \\ 2c_2 + c_2 \ = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 \ = \ - \frac{1}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare: $\begin{cases} x(t) = \ - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}\, e^{2t} \\ y(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}\, e^{2t} \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\, e^{y-x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ con $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1;\ -1 \le y \le 0\right\}$.

La regione di integrazione è un rettangolo per cui possiamo passare ad integrare:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x\, e^{y-x^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \left(\int_0^1 x\, e^{y-x^2}\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} \left(-\frac{1}{2}\, e^{y-x^2} \Big|_0^1 \right. \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-1}^{0} -\frac{1}{2}\, e^{y-1} + \frac{1}{2}\, e^{y}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left(-e^{y-1} + e^{y} \Big|_{-1}^{0} \right. = \frac{1}{2} \Big[\big(-e^{-1} + 1 \big) - \Big(-e^{-2} + e^{-1} \Big) \Big] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^2} - \frac{2}{e} + 1 \right) = \frac{1 - 2e + e^2}{2e^2} = \frac{(e-1)^2}{2e^2}\,.$$