COMPITO di ANALISI MATEMATICA 15/3/2021

I M 1) Se $z = e\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, sapendo che $e^{1-3i}\cdot z = e^{2+i}$, determinare α.

$e^{1-3i}\cdot z = e^{2+i} \Rightarrow z = \dfrac{e^{2+i}}{e^{1-3i}} = e^{2+i-(1-3i)} = e^{1+4i} = e\,(\cos 4 + i\,\mathrm{sen}\,4)\,.$
Quindi $\alpha = 4\,.$

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, determinare se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Anzitutto controlliamo la continuità della funzione in $(0,0)$.
Passando a coordinate polari avremo:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to0} \frac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho} = \lim_{\varrho\to0} \varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0\,.$$
La convergenza è uniforme in quanto $|\,\varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta| \le \varrho$.
Quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\left(\frac{h\cdot 0}{\sqrt{h^2+0}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\left(\frac{0\cdot h}{\sqrt{0+h^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0\,.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)\,.$
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$
Passando a coordinate polari si ha: $\lim\limits_{\varrho\to0}\dfrac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho^2} = \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta$, e quindi il risultato vale 0 solo per particolari valori di ϑ. Quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x\,e^{y-x} - y\,e^{x+y} = 0$, soddisfatta nel punto $(0,0)$, verificare che con essa è possibile definire una funzione implicita $x \to y\,(x)$ e calcolare quindi le derivate prima e seconda di tale funzione in $x = 0$.

La funzione è palesemente una funzione differenziabile. Calcoliamo $\nabla f(x,y)$ ed avremo:
$\nabla f(x,y) = \left(e^{y-x} - x\,e^{y-x} - y\,e^{x+y},\, x\,e^{y-x} - \,e^{x+y} - y\,e^{x+y}\right)$ ovvero
$\nabla f(x,y) = \left((\,1-x)\,e^{y-x} - y\,e^{x+y},\, x\,e^{y-x} - (\,1+y)\,e^{x+y}\right) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (1,\,-1)\,.$
Dato che $f'_y(0,0) = -1 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to y\,(x)$ ed avremo poi: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -\dfrac{1}{-1} = 1\,.$ Passando al calcolo della derivata seconda, essendo:

$\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}(x-2)\,e^{y-x}-y\,e^{x+y} & (1-x)\,e^{y-x}-(1+y)\,e^{x+y}\\ (1-x)\,e^{y-x}-(1+y)\,e^{x+y} & x\,e^{y-x}-(2+y)\,e^{x+y}\end{matrix}\right\|$ e quindi:
$\mathbb{H}(0,0)=\left\|\begin{matrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{matrix}\right\|$. Dalla $y''=-\dfrac{f''_{xx}+2f''_{xy}\,y'+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha:
$y''(0)=-\dfrac{(-2)+2\cdot(0)\cdot 1+(-2)(1)^2}{-1}=-4\,.$

I M 4) Data $f(x,y,z)=x\,y\,z-x+y-z$ ed il versore v del vettore $(1,1,1)$ si calcolino $\mathcal{D}_v f(1,1,1)$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(1,1,1)$.

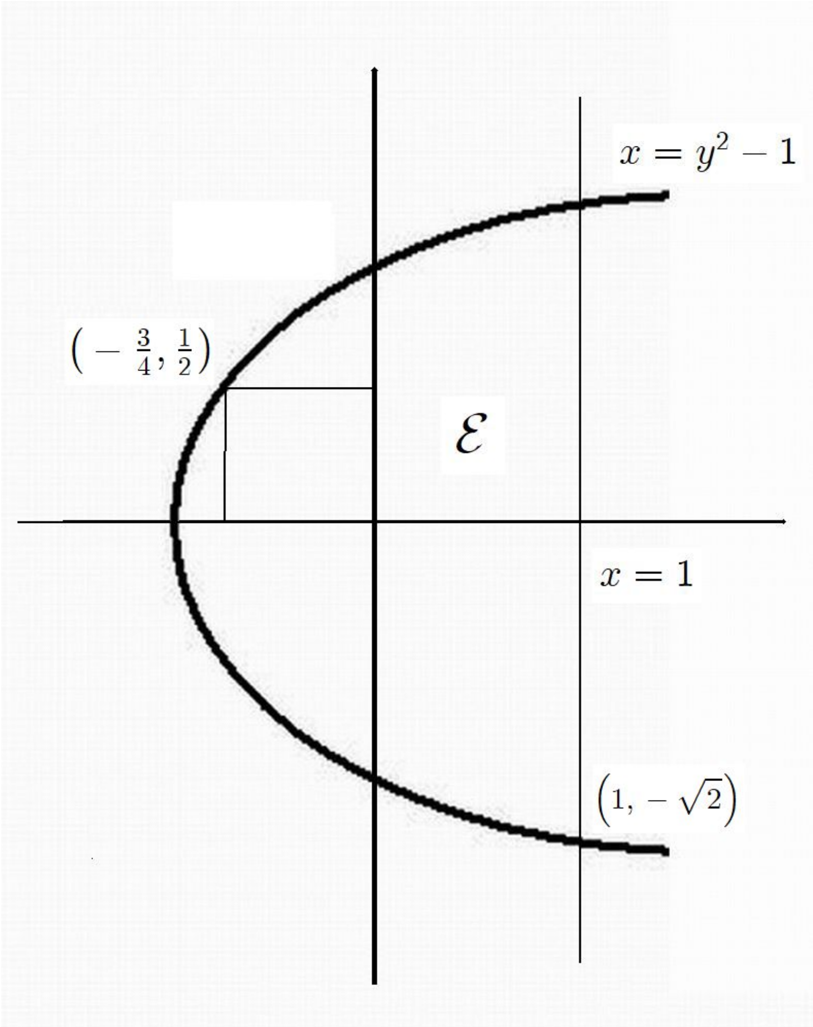
La funzione è palesemente una funzione differenziabile almeno due volte. Quindi: $\mathcal{D}_v f(1,1,1)=\nabla f(1,1,1)\cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(1,1,1)=v\cdot\mathbb{H}(1,1,1)\cdot v^T$. Calcoliamo $\nabla f(x,y,z)$ ed avremo: $\nabla f(x,y,z)=(yz-1,xz+1,xy-1)$ da cui $\nabla f(1,1,1)=(0,2,0)$.
Essendo $v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ si ha $\mathcal{D}_v f(1,1,1)=(0,2,0)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Risulta poi $\mathbb{H}(x,y,z)=\left\|\begin{matrix}0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0\end{matrix}\right\|$ da cui $\mathbb{H}(1,1,1)=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|$. Quindi:

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(1,1,1)=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=2\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x-y\\ \text{s.v.: } y^2-1\le x\le 1\end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.



Per risolvere il problema utilizziamo le condizioni di Kuhn-Tucker.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x - y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} y^2 - x - 1 \le 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

Formiamo la funzione Lagrangiana:

$\Lambda(x,y,\lambda) = x - y - \lambda_1\left(y^2 - x - 1\right) - \lambda_2(x-1)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \ne 0 \\ \Lambda'_y = -1 \ne 0 \\ y^2 - x - 1 \le 0 \\ x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x = y^2 - 1 \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 < 0 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{4} \le 1 \end{cases};$$

essendo $\lambda_1 = -1 < 0$ il punto $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ potrebbe essere di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = -1 \neq 0 \\ x = 1 \\ y^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{nessuna soluzione}.$$

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x = 1 \\ x = y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = -1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x = 1 \\ y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2\sqrt{2}\,\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{2} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2\sqrt{2}} < 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 = \frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} > 0 \end{cases}.$$

Essendo $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 0$ e $\lambda_2 = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} > 0$ il punto $\left(1, \sqrt{2}\right)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 - 2\lambda_1 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -1 + 2\sqrt{2}\,\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\sqrt{2} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 = \frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} > 0 \end{cases}.$$

Essendo $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} > 0$ e $\lambda_2 = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} > 0$ il punto $\left(1, -\sqrt{2}\right)$ potrebbe essere punto di massimo.

Avendo però trovato due sole soluzioni, per il Teorema di Weierstrass, il punto $\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$ è il punto di minimo, con $f\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ mentre il punto $\left(1, -\sqrt{2}\right)$ è il punto di massimo, con $f\left(1, -\sqrt{2}\right) = 1 + \sqrt{2}$.

II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - y = 0 \\ x + y' = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D & -1 \\ 1 & D \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \right\| \Rightarrow \begin{vmatrix} D & -1 \\ 1 & D \end{vmatrix} (x) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(D^2+1\right)(x) = x'' + x = 0\,.$

Da $x''+x=0$ otteniamo $\lambda^2+1=0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t\,.$
Dalla prima equazione ricaviamo $y = x'$ e quindi: $y(t) = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t\,.$
Quindi la soluzione generale $\begin{cases} x(t) = c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t \\ y(t) = c_1 \cos t - c_2 \operatorname{sen} t \end{cases}.$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2+y}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}.$

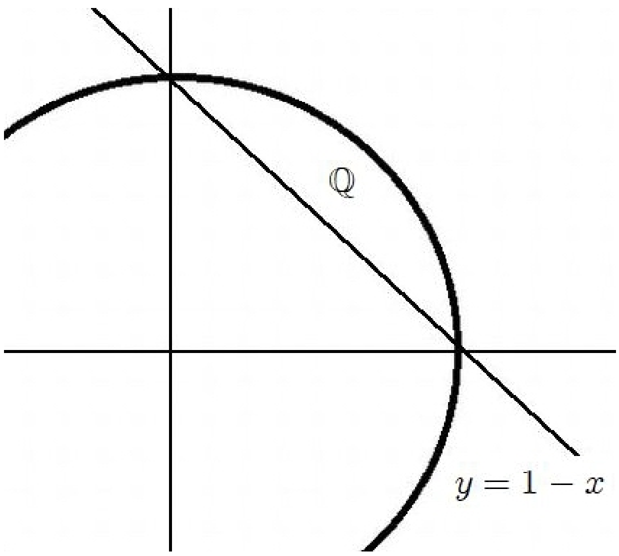
Da $y' = \dfrac{x^2+y}{x} \Rightarrow y' = x + \dfrac{y}{x} \Rightarrow y' - \dfrac{y}{x} = x$: equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, con $p(x) = \dfrac{1}{x}$ e $q(x) = x$. Avremo quindi:

$$y = e^{\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x} \cdot \left(\int x\, e^{-\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + k \right) \Rightarrow e^{\log x} \cdot \left(\int x\, e^{-\log x}\,\mathrm{d}x + k \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot \left(\int x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + k \right) \Rightarrow x \cdot \left(\int \mathrm{d}x + k \right) \Rightarrow x \cdot (x+k) = x^2 + kx\,.$$

Da $y(1)=0$ otteniamo $1+k=0 \Rightarrow k = -1$ e quindi la soluzione particolare del problema di Cauchy: $y = x^2 - x\,.$

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - x \le y\,; x^2+y^2 \le 1 \right\}.$



Avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x\,y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} x\,y\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 \Big|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \cdot x\,\mathrm{d}x = \right.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - x^2 - (1-x)^2\right) x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 2x^2 - 2x^3\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2 - x^3\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{4}\,x^4\right|_0^1 = \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - (0)\right] = \frac{1}{12}\,.$$