COMPITO di ANALISI MATEMATICA 16/9/2021

I M 1) I numeri complessi z_1 e z_2 hanno ambedue modulo pari a 1, mentre il primo ha per argomento $\frac{\pi}{4}$ mentre il secondo ha per argomento $\frac{\pi}{3}$. Si deducano da queste informazioni i valori del coseno e del seno di $\frac{7\pi}{12}$.

Risulta $z_1 \cdot z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$
in quanto $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$. Ma:

$$z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

e quindi $\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ da cui:
$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ mentre $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Anzitutto controlliamo la continuità della funzione in $(0,0)$.
Dovendosi verificare: $\left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$, essendo:

$$\left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \cdot |\operatorname{sen} y| \le 1 \cdot |\operatorname{sen} y|$$

risulta $\left|\frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} - 0\right| \le |\operatorname{sen} y| < \varepsilon$ che risulta verificata in un intorno di $(0,0)$, basta prendere $|y| < \delta$ con $\delta = \operatorname{arcsen}\varepsilon$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2 \cdot 0}{h^2+0} - 0\right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0 \cdot \operatorname{sen} h}{0+h^2} - 0\right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 \operatorname{sen} y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari si ha:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}(\varrho \operatorname{sen}\vartheta)}{\varrho^3} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\varrho \operatorname{sen}\vartheta)}{\varrho \operatorname{sen}\vartheta} \cdot \operatorname{sen}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta =$$

$= 1 \cdot \operatorname{sen}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta = \operatorname{sen}\vartheta \cdot \cos^2\vartheta$, e quindi il risultato vale 0 solo per particolari valori di ϑ. Quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x-y} + e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2} = 0$ ed il punto $\mathrm{P} = (1,1)$ che la soddisfa, si determina una funzione implicita $x \to y(x)$; di questa funzione calcolare derivata prima e seconda nel punto opportuno.

La funzione $f(x,y) = e^{x-y} + e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2}$ è differenziabile $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Inoltre $f(1,1) = 1 + 1 - 2 = 0$. Da:
$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y} - e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2};\ -e^{x-y} + e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2}\right)$
otteniamo: $\nabla f(1,1) = (1 - 1 - 2;\ -1 + 1 - 2) = (-2;\ -2)$.
Dato che $f'_y \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to y\,(x)$. Si ha poi:

$$\mathbb{H}(x,y) = \left\| \begin{array}{cc} e^{x-y} + e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2} & -e^{x-y} - e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2} \\ -e^{x-y} - e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2} & e^{x-y} + e^{y-x} - 2\,e^{x+y-2} \end{array} \right\|$$

da cui $\mathbb{H}(1,1) = \left\| \begin{array}{cc} 0 & -4 \\ -4 & -0 \end{array} \right\|$.

Per il calcolo della derivata seconda useremo la $y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$.

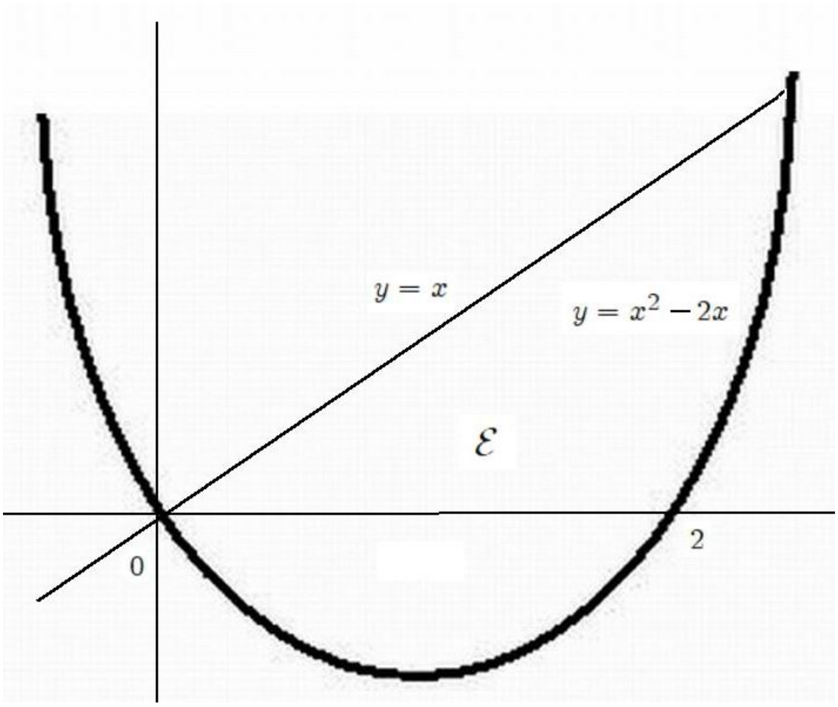
Sarà quindi, nel punto $(1,1)$: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\dfrac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\dfrac{-2}{-2} = -1$ e

$$y''(1) = -\frac{0 + 2 \cdot (-4) \cdot (-1) + 0\,(-1)^2}{-\ -2} = 4\,,$$

I M 4) Data la funzione $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} + y\,e^{x-z}$, calcolare $\mathcal{D}_v f(1,1,1)$, dove v è il versore del vettore che dal punto $(1,1,1)$ va al punto $(1,2,2)$.

La funzione $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} + y\,e^{x-z}$ è differenziabile per cui $\mathcal{D}_v f(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot v$.
Da $\nabla f(x,y,z) = (e^{y-z} + y\,e^{x-z}, x\,e^{y-z} + e^{x-z}, -x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z})$ si ha :
$\nabla f(1,1,1) = (2,2,-2)$.
Il vettore che dal punto $(1,1,1)$ va al punto $(1,2,2)$ è $\mathbb{V} = (1,2,2) - (1,1,1) = (0,1,1)$ e quindi $v = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ per cui $\mathcal{D}_v f(1,1,1) = (2,2,-2) \cdot \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x\,y \\ \text{s.v. : } \begin{cases} x^2 - 2x - y \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$.



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Per completare la soluzione del problema utilizziamo le condizioni di Kuhn-Tucker.
Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x\,y - \lambda_1\big(x^2 - 2x - y\big) - \lambda_2(y - x)\,.$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2 - 2x - y \le 0 \\ y - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 - 0 - 0 \le 0 \\ 0 - 0 \le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| < 0$ segue che $(0,0)$ è un punto di sella.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y + 2\lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 2\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 0 \\ y - x \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1^2 + 4\lambda_1 = 0 \\ y - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ \lambda_1(3\lambda_1 + 4) = 0 \\ y - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 \le 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{8}{9} \\ \lambda_1 = -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{9} - \frac{4}{3} \le 0 \end{cases}.$$

Conosciamo già la natura del punto $(0,0)$ mentre $\left(\frac{4}{3},\ -\frac{8}{9}\right)$, dato che $\lambda_1 = -\frac{4}{3} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ x^2 - 2x - y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = -\lambda_2 \\ x^2 - 2x - y \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases}.$$

Conosciamo già la natura del punto $(0,0)$.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 6\lambda_1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \\ \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 5 \end{cases}.$$

Conosciamo già la natura del punto $(0,0)$ mentre il punto $(3,3)$, essendo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ potrebbe essere un punto di massimo.

Avendo trovato solo due soluzioni, una per il massimo ed una per il minimo, queste sono le soluzioni del problema, con $f(3,3) = 9$ e $f\left(\frac{4}{3},\ -\frac{8}{9}\right) = -\frac{32}{27}$.

II M 2) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y + t \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = y - x \\ y' = x - y + t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' + x - y = 0 \\ -x + y' + y = t \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D+1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 \\ t \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D+1 & -1 \\ -1 & D+1 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ t & D+1 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2 + 2D + 1 - 1\right)(x) = 0 + t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(D^2 + 2D\right)(x) = t \Rightarrow x'' + 2x' = t.$$

Da $x'' + 2x' = 0$ otteniamo $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 + c_2\, e^{-2t}$.
Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, dato che $D^2(t) = 0$, dobbiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo $x_0 = a\,t^2 + bt + c \Rightarrow x'_0 = 2at + b \Rightarrow x''_0 = 2a$ e sostituendo nella $x'' + 2x' = t$ otteniamo $2a + 4at + 2b = t \Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$.

Sarà quindi $x(t) = c_1 + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{1}{4} t^2 - \dfrac{1}{4} t$. Dalla prima equazione ricaviamo:

$y = x' + x$ e quindi: $y(t) = -2c_2\, e^{-2t} + \dfrac{1}{2} t - \dfrac{1}{4} + c_1 + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{1}{4} t^2 - \dfrac{1}{4} t$ ovvero:

$y(t) = \left(c_1 - \dfrac{1}{4}\right) - c_2\, e^{-2t} + \dfrac{1}{4}\, t^2 + \dfrac{1}{4}\, t$ e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 + c_2\, e^{-2t} + \frac{1}{4}\, t^2 - \frac{1}{4}\, t \\ y(t) = \left(c_1 - \frac{1}{4}\right) - c_2\, e^{-2t} + \frac{1}{4}\, t^2 + \frac{1}{4}\, t \end{cases}.$$

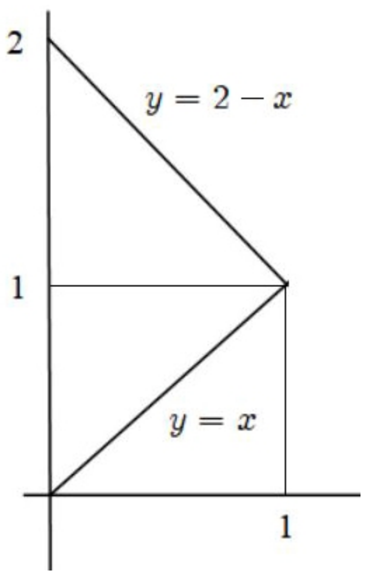
II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y' = y \log x \\ y(1) = 0 \end{cases}$.

Da $y' = y \log x \Rightarrow \dfrac{1}{y}\, y' = \log x,$ posto $y \neq 0$: equazione differenziale a variabili separate.
Osserviamo comunque che la $y = 0$ è soluzione del problema.
Avremo quindi, integrando per parti:

$$\int \frac{1}{y}\, y'\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \int \log x\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow \log |y| = x \log x - \int x\, \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \log |y| = x \log x - x + k \Rightarrow |y| = e^{x \log x - x + k} = e^{x \log x}\, e^{-x}\, e^{k}.$$

Posto $e^k = m,\ m \in \mathbb{R}$, dato che $e^{x \log x} = \left(e^{\log x}\right)^x = x^x$, avremo infine la soluzione generale del problema: $y = m\, x^x\, e^{-x}$.
Dalla $y(1) = 0$ otteniamo $0 = m\, 1\, e^{-1} \Rightarrow m = 0$ e quindi la soluzione $y = 0$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x - e^y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \leq x, x \leq y \leq 2 - x\right\}$.



Avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x - e^y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_x^{2-x} x - e^y\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x\, y - e^y\right|_x^{2-x}\, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(2x - x^2 - e^{2-x}\right) - \left(x^2 - e^x\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 2x - 2x^2 - e^{2-x} + e^x\, \mathrm{d}x =$$
$$= \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3 + e^{2-x} + e^x\right|_0^1 = \left(1 - \frac{2}{3} + e + e\right) - \left(0 - 0 + e^2 + 1\right) = 2e - e^2 - \frac{2}{3}.$$