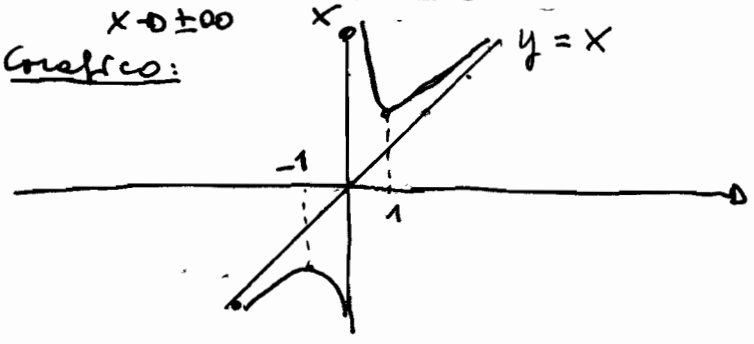
Compito di Matematica Generale del 8/10/2021 $\boxed{\text{CMG1}}$

1) $f(x) = \frac{1+x^2}{x} = \frac{1}{x} + x$. C.E: $x \neq 0$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. $f(x) > 0$ per $x > 0$. $f(-1) = -2$; $f(1) = 2$.

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2}{x^2} = 1$; $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+x^2-x^2}{x} = 0$.

Asintoto obliquo per $x\to\infty$: $y = x$. Grafico:



$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} \geq 0$ per $x^2 \geq 1$:

$x \leq -1 \cup x \geq 1$

$f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ per $x > 0$.

2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\log(1-x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{-x^2}{\log(1-x^2)} \cdot (-1) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) = -\frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+3e^x)}{\log(1+2e^x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x}{1+3e^x} \cdot \frac{1+2e^x}{2e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2} \cdot \frac{1+2e^x}{1+3e^x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} = 1$.

3) $f(x) = \frac{1+\log x}{1-\log x}$. C.E.: $\begin{cases} x > 0 \\ \log x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e \end{cases}$. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log x}{1-\log x} = -1$.

$\lim_{x\to e^-} \frac{1+\log x}{1-\log x} = +\infty$; $\lim_{x\to e^+} \frac{1+\log x}{1-\log x} = -\infty$. In $x = 0$ (da destra): Disc. 3ª specie
In $x = e$: Discontinuità 2ª specie.

4) $f(x) = 2 - x$; $g(x) = \log(1+2x)$. $f(g(x)) = 2 - \log(1+2x) = y \Rightarrow \log(1+2x) = 2-y \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 + 2x = e^{2-y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}(e^{2-y} - 1)$; inversa di $f(g(x))$: $y = \frac{1}{2}(e^{2-x} - 1)$.

$g(f(x)) = \log(1+2(2-x)) = \log(5-2x) = y \Rightarrow 5 - 2x = e^y \Rightarrow x = \frac{1}{2}(5 - e^y)$;
inversa di $g(f(x))$: $y = \frac{1}{2}(5 - e^x)$.

5) $\int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,dx = \left(\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3e^3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3e^3} - \frac{5}{6}$.

6) $f(x) = x^2 - 2x + 3$; se tg: $y = k - x \Rightarrow f'(x_0) = 2x_0 - 2 = -1 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{2}$.

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - 1 + 3 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{9}{4} = k - \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$. $y = -x + \frac{11}{4}$.

CMG2

7) $f(x;y) = 2x - x^2y^2 + y^2$. $\nabla f(x;y) = (0;0) \Rightarrow$

$$\begin{cases} f'_x = 2 - 2xy^2 = 0 \\ f'_y = 2y - 2x^2y = 2y(1-x^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ 2 + 2y^2 = 0 \end{cases} \text{ NO Soluzioni}$$

$\begin{cases} y = 0 \\ 2 = 0 \end{cases}$: NO Soluzioni. $H(x;y) = \begin{Vmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & 2-2x^2 \end{Vmatrix}$.

$H(1;1) = \begin{Vmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{Vmatrix}$: $|H_2| = -16 < 0$: Sella; $H(1;-1) = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{Vmatrix}$: $|H_2| = -16 < 0$: Sella.

8) $A \cdot X = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} K \\ 1 \\ K \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K+1+0 \\ K+0+2K \\ 0+2+K \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} K+1 \\ 3K \\ K+2 \end{Vmatrix}$.

$(K+1; 3K; K+2) \parallel (4;6;6)$ se $\frac{K+1}{4} = \frac{3K}{6} = \frac{K+2}{6} \Rightarrow \begin{cases} 6K+6 = 12K \\ 18K = 6K+12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6K = 6 \\ 12K = 12 \end{cases} \Rightarrow K = 1$;

$(K+1; 3K; K+2) \perp (1;1;1)$ se $(K+1; 3K; K+2) \cdot (1;1;1) = K+1+3K+K+2 = 5K+3 = 0 \Rightarrow K = -\frac{3}{5}$.

9)

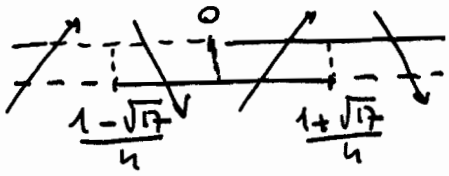
A	B	(A⇒B)	(A e (A⇒B))	non B	[A e (A⇒B)] ⇒ non B
1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1

La proposizione è falsa solo quando A e B sono vere. Altrimenti è vera.

10) $f(x) = x^2 \cdot e^{x-x^2}$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$; $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^+$.

$f'(x) = 2x \cdot e^{x-x^2} + x^2 \cdot e^{x-x^2} \cdot (1-2x) = x e^{x-x^2} \cdot (2 + x - 2x^2) \geq 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2 + x - 2x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - x - 2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+16}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$



In $x = 0$ punto di minimo assoluto con $f(0) = 0$

In $x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$ punto di massimo relativo.

In $x = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ punto di massimo assoluto.