COMPITO di ANALISI MATEMATICA 8/10/2021

I M 1) I numeri complessi z_1 e z_2 hanno ambedue modulo pari a 1, mentre il primo ha per argomento $\frac{3\pi}{4}$ mentre il secondo ha per argomento $\frac{\pi}{3}$. Si calcolino le radici quadrate del quoziente $\frac{z_1}{z_2}$.

Risulta $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{5\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{12}$

in quanto $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$. E quindi:

$\sqrt{\frac{z_1}{z_2}} = \cos\left(\frac{5\pi}{24} + k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{24} + k\pi\right), 0 \le k \le 1$.

Per $k = 0$: $\cos\frac{5\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{24}$; per $k = 1$: $\cos\frac{29\pi}{24} + i \operatorname{sen}\frac{29\pi}{24}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = x\,|y-1|$, determinare se tale funzione risulta differenziabile nel punto $(0,1)$.

La funzione, essendo un prodotto di funzioni elementari, è palesemente continua in $(0,1)$, con $f(0,1) = 0$. Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|0|}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h) - f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot|h|}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$.

Quindi $\nabla f(0,1) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,1)$ dobbiamo infine verificare se:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,1) - \nabla f(0,1)\cdot(x-0,y-1)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}} = 0$ ovvero se:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y-1|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = 0$. Mediante una trasformazione in coordinate polari con centro nel punto $(0,1)$: $\begin{cases} x = 0 + \varrho\cos\vartheta \\ y = 1 + \varrho\operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ otteniamo:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|y-1|}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho\cos\vartheta\,|\varrho\operatorname{sen}\vartheta|}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0}\cos\vartheta\,|\varrho\operatorname{sen}\vartheta| = 0$.

La convergenza è uniforme in quanto $|\cos\vartheta\,|\varrho\operatorname{sen}\vartheta|| \le \varrho$ e quindi la funzione risulta differenziabile in $(0,1)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^3y - xy^3 + xy - y = 0$, soddisfatta in $P = (1,1)$, si determini l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $y = y(x)$ da essa definita.

La funzione $f(x,y) = x^3y - xy^3 + xy - y$, essendo un polinomio, è differenziabile $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Inoltre $f(1,1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$. Da:

$\nabla f(x,y) = \left(3x^2y - y^3 + y; x^3 - 3xy^2 + x - 1\right)$

otteniamo: $\nabla f(1,1) = (3-1+1; 1-3+1-1) = (3; -2)$.
Dato che $f'_y \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $x \to y(x)$. Si ha poi:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6xy & 3x^2-3y^2+1 \\ 3x^2-3y^2+1 & -6xy \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(1,1) = \begin{Vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -6 \end{Vmatrix}$.
Per il calcolo della derivata seconda useremo la $y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$.
Sarà quindi, nel punto $(1,1)$: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -\dfrac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -\dfrac{3}{-2} = \dfrac{3}{2}$ e
$y''(1) = -\dfrac{6 + 2\cdot 1\cdot \frac{3}{2} + (-6)\left(\frac{3}{2}\right)^2}{-2} = -\dfrac{9}{4}$,
L'espressione del Polinomio di Taylor nel punto $x = 1$ sarà quindi:
$P(x,1) = 1 + \dfrac{3}{2}(x-1) + \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{9}{4}\right)(x-1)^2 = 1 + \dfrac{3}{2}(x-1) - \dfrac{9}{8}(x-1)^2$.

I M 4) Data la curva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 : t \to \left(e^{1-t^2}; t^2 - 2t; \operatorname{sen} t\right)$, se ne determini l'equazione della retta tangente nel punto $t = 0$.

Da $\mathbb{X}(t) = \left(e^{1-t^2}; t^2-2t; \operatorname{sen} t\right)$ segue $\mathbb{X}(0) = (e; 0, 0)$.
Da $\mathbb{X}'(t) = \left((-2t)\,e^{1-t^2}; 2t-2; \cos t\right)$ segue $\mathbb{X}'(0) = (0; -2; 1)$.
Quindi l'equazione della retta tangente nel punto $t = 0$ sarà:
$t \to (e; 0; 0) + t\,(0; -2; 1) = (e; -2t; t)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x - y + z \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x\,y = 1 \\ x\,z = 2 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, ma i vincoli non definiscono come regione ammissibile un insieme compatto, e quindi non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass.
La funzione lagrangiana risulterebbe:
$\Lambda(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x\,y - \lambda_1(xy-1) - \lambda_2(xz-2)$.
Vista l'espressione dei vincoli, che permettono di poter facilmente esplicitare rispetto alla variabile x, otteniamo:
$\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y,z) = x - y + z \\ \text{s.v.: } \begin{cases} y = \frac{1}{x} \\ z = \frac{2}{x} \end{cases} \end{cases}$ sostituendo otteniamo:
Max/min $f\left(x, \dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{x}\right) = x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = x + \dfrac{1}{x}$.
Quindi $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} \geq 0$ per $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 1$ vera per :
$x \leq -1$ e per $x \geq 1$. Per cui avremo:

e quindi in $x = -1$ abbiamo un punto di massimo mentre in $x = 1$ abbiamo un punto di minimo.
Da $x = -1$ segue $\begin{cases} y = -1 \\ z = -2 \end{cases}$ mentre da $x = 1$ segue $\begin{cases} y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$.
E quindi $f(-1, -1, -2) = -2$ mentre $f(1,1,2) = 2$.

II M 2) Data $f(x,y) = y \cdot \log\left(x^2 + y^2\right)$, si determinino i punti che rendono nullo il suo gradiente.

Risulta: $\begin{cases} f'_x = y \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ f'_y = \log\left(x^2+y^2\right) + y \cdot \frac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$ e quindi $\begin{cases} 2xy = 0 \\ \log\left(x^2+y^2\right) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$.
Da $\begin{cases} x = 0 \\ \log\left(y^2\right) + \frac{2y^2}{y^2} = \log\left(y^2\right) + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \log\left(y^2\right) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = e^{-2} \end{cases}$ e quindi due soluzioni: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{\frac{1}{e^2}} = \frac{1}{e} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = 0 \\ y = -\sqrt{\frac{1}{e^2}} = -\frac{1}{e} \end{cases}$.
Da $\begin{cases} y = 0 \\ \log\left(x^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$.
Concludendo abbiamo quattro punti: $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$, $\left(0, -\dfrac{1}{e}\right)$, $(1,0), (-1,0)$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y''' - y'' + y' - y = e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea associata $y''' - y'' + y' - y = 0$.
Passando al suo polinomio caratteristico avremo $t^3 - t^2 + t - 1 = 0$ che si vede facilmente annullarsi per $t = 1$. Risulta $t^3 - t^2 + t - 1 = t^2\,(t-1) + t - 1 = 0$, oppure mediante Ruffini, ed abbiamo:

	1	−1	1	−1
1		1	0	1
	1	0	1	0

quindi $t^3 - t^2 + t - 1 = (t-1)\left(t^2+1\right) = 0$ da cui le tre radici $t = 1, t = i, t = -i$.
La soluzione generale dell'equazione omogenea sarà quindi:
$y(x) = c_1\,e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x$.
Dato che il termine noto e^x è annichilato dall'operatore $D - 1$, dovremo ipotizzare una soluzione particolare del tipo $y_0 = a\,e^x + bx\,e^x$ da cui otteniamo:

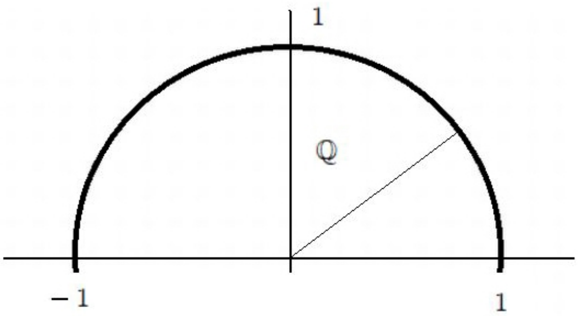
$y_0' = a\,e^x + b\,e^x + bx\,e^x = (a+b)\,e^x + bx\,e^x$;
$y_0'' = (a+b)\,e^x + b\,e^x + bx\,e^x = (a+2b)\,e^x + bx\,e^x$;
$y_0''' = (a+2b)\,e^x + b\,e^x + bx\,e^x = (a+3b)\,e^x + bx\,e^x$.
Sostituendo nella $y''' - y'' + y' - y = e^x$ otteniamo:
$(a+3b)\,e^x + bx\,e^x - (a+2b)\,e^x - bx\,e^x + (a+b)\,e^x + bx\,e^x - a\,e^x - bx\,e^x = e^x$
ovvero: $b\,e^x = e^x$ e quindi $b = 1$.
La soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà quindi:
$y(x) = c_1\,e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + x\,e^x$.
Per determinare la soluzione particolare del problema di Cauchy, da:

$$\begin{cases} y = c_1\,e^x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 \cos x + x\,e^x \\ y' = c_1\,e^x + c_2 \cos x - c_3 \operatorname{sen} x + e^x + x\,e^x \\ y'' = c_1\,e^x - c_2 \operatorname{sen} x - c_3 \cos x + 2e^x + x\,e^x \end{cases} \quad \text{otteniamo:}$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_3 = 1 \\ y'(0) = c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ y''(0) = c_1 - c_3 + 2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3 = 1 - c_1 \\ c_2 = -c_1 - 1 \\ c_1 - 1 + c_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

e quindi la soluzione particolare $\overline{y}(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x + x\,e^x$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y, x^2 + y^2 \le 1\right\}$.



Avremo, passando a coordinate polari $\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varrho^2 \cos^2\vartheta \cdot \varrho \operatorname{sen}\vartheta \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\vartheta = \int_0^\pi \left(\int_0^1 \varrho^4 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^\pi \left(\frac{1}{5} \varrho^5 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \Big|_0^1 \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{5} \int_0^\pi (1-0) \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{5} \int_0^\pi \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\cos^3\vartheta \right|_0^\pi = \frac{1}{15} (1 - (-1)) = \frac{2}{15} .$$