COMPITO di ANALISI MATEMATICA 30/11/2021

Prova intermedia

I M 1) Calcolare un valore di z se $e^z = 3\sqrt{3} - 3\,i$.

Risulta $e^z = 3\sqrt{3} - 3\,i = 6\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)$ e quindi:

$$e^z = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i\right) = 6\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{11}{6}\pi + 2k\pi\right)\right).$$

Il valore principale è quindi $e^z = 6\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{11}{6}\pi\right)$.

Da $e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y)$ si ha:

$\begin{cases} e^x = 6 \Rightarrow x = \log 6 \\ y = \frac{11}{6}\pi \end{cases}$ e quindi $z = \log 6 + i\,\dfrac{11}{6}\pi$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2 \cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\varrho^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varrho\to 0} \sqrt[3]{\varrho^4}\cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta| = 0$, la convergenza è uniforme in quanto $|\cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta|| \leq 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \cdot |0|}{\sqrt[3]{h^2} \cdot h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0 \cdot |h|}{\sqrt[3]{h^2} \cdot h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^2\cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta|}{\varrho^{\frac{5}{3}}} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^{\frac{1}{3}}\cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta| = 0\,.$$

La convergenza è uniforme in quanto $|\cos\vartheta\,|\mathrm{sen}\,\vartheta|| \leq 1$ e quindi la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data $f(x,y)=x^2+y^2$ ed i vettori $\mathbb{V}=(1,1)$ e $\mathbb{W}=(1,-1)$, detti rispettivamente v e w i versori di $\mathbb{V}$ e di $\mathbb{W}$, se $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=\sqrt{2}$ e $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0)=2\sqrt{2}$, determinare le coordinate del punto (x_0,y_0) e calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)$.

La funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ è un polinomio e quindi sempre differenziabile, per cui sarà: $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v$ e $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot w$. Essendo: $\nabla f(x.y)=(2x;2y)$, $v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avremo allora:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=(2x;2y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\\ \mathcal{D}_w f(x_0,y_0)=(2x;2y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}\,x+\sqrt{2}\,y=\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=1\\ x-y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{3}{2}\\ y_0=-\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Essendo poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=v\cdot\mathbb{H}(x_0,y_0)\cdot w^T$, essendo $\mathbb{H}(x_0,y_0)=\begin{Vmatrix}2&0\\0&2\end{Vmatrix}$, sarà:

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2&0\\0&2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{Vmatrix}=0.$$

I M 4) Con l'equazione $f(x,y,z)=4xz-3y^2-x^3+e^{z-x}-y^3=0$, soddisfatta nel punto $\mathrm{P}=(1,1,1)$, verificare, mediante il Teorema del Dini, l'esistenza di una funzione implicita $(x,y)\to z(x,y)$, della quale calcolare le derivate prime nonchè l'equazione del piano tangente alla superficie di tale funzione implicita nel punto considerato.

La funzione $f(x,y,z)=4xz-3y^2-x^3+e^{z-x}-y^3$, essendo un polinomio, è differenziabile $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Inoltre $f(1,1,1)=4-3-1+1-1=0$. Da:
$\nabla f(x,y,z)=\left(4z-3x^2-e^{z-x};-6y-3y^2;4x+e^{z-x}\right)$
otteniamo: $\nabla f(1,1,1)=(4-3-1;-6-3;4+1)=(0;-9;5)$.
Dato che $f'_z\neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $(x,y)\to z(x,y)$.
Sarà quindi, nel punto $(1,1)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\frac{f'_x(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)}=-\frac{0}{5}=0 \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\frac{f'_y(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)}=-\frac{-9}{5}=\frac{9}{5}.$$

L'equazione del piano tangente alla superficie di tale funzione implicita nel punto $(1,1)$ sarà:

$$z-1=f'_x(1,1,1)\cdot(x-1)+f'_y(1,1,1)\cdot(y-1)=0\cdot(x-1)+\frac{9}{5}\cdot(y-1) \text{ ovvero}$$

$$z=\frac{9}{5}\cdot(y-1)+1.$$

I M 5) Dato il sistema $\begin{cases}f(x,y,z,w)=x^3w-y^3z+xz^3-yw^3=1\\ g(x,y,z,w)=xy-zw+e^{x-z}-e^{w-y}=0\end{cases}$ soddisfatto nel punto $\mathrm{P}=(1,0,0,1)$, determinare una funzione implicita con esso definibile e di questa calcolare le derivate prime nel punto opportuno.

Le funzioni $f(x,y,z,w)$ e $g(x,y,z,w)$ sono funzioni differenziabili. Inoltre:

$\begin{cases} f(1,0,0,1) = 1 - 0 + 0 - 0 = 1 \\ g(1,0,0,1) = 0 - 0 + e - e = 0 \end{cases}$. Calcolando la matrice Jacobiana avremo:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z,w)} = \begin{Vmatrix} 3x^2w + z^3 & -3y^2z - w^3 & -y^3 + 3xz^2 & x^3 - 3yw^2 \\ y + e^{x-z} & x + e^{w-y} & -w - e^{x-z} & -z - e^{w-y} \end{Vmatrix}$$

da cui $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z,w)}(1,0,0,1) = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 \\ e & 1+e & -1-e & -e \end{Vmatrix}$.

Essendo $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-e & -e \end{vmatrix} = 1 + e \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita:

$(x,y) \to (z(x,y); w(x,y))$ le cui derivate saranno date da:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ e & -e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-e & -e \end{vmatrix}} = -\frac{-3e-e}{1+e} = \frac{4e}{1+e};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1+e & -e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-e & -e \end{vmatrix}} = -\frac{e-1-e}{1+e} = \frac{1}{1+e};$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1-e & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-e & -e \end{vmatrix}} = -\frac{3+3e}{1+e} = -3;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1,0) = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1-e & 1+e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1-e & -e \end{vmatrix}} = -\frac{-1-e}{1+e} = 1.$$