# COMPITO di ANALISI MATEMATICA 11/1/2022

I M 1) Data l'equazione $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$, determinare le radici cubiche della sua soluzione complessa situata nel quarto quadrante del piano.

Se $x = 2$ risulta $8 - 16 + 12 - 4 = 0$ e quindi il polinomio è divisibile per $x - 2$.
Usando Ruffini avremo:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | -4 | 6 | -4 |
| 2 | | 2 | -4 | 4 |
| | 1 | -2 | 2 | 0 |

e quindi $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = (x-2)\left(x^2 - 2x + 2\right)$.
Da $x^2 - 2x + 2 = 0$ segue $x = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i$.
Quindi la soluzione complessa situata nel quarto quadrante del piano è la $x = 1 - i$.
Essendo $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{4}\pi\right)$ risulta:
$\sqrt[3]{1-i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7}{12}\pi + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7}{12}\pi + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2$.
Per $k = 0$ : $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i \operatorname{sen}\frac{7}{12}\pi\right)$;
Per $k = 1$ : $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \operatorname{sen}\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
Per $k = 2$ : $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23}{12}\pi + i \operatorname{sen}\frac{23}{12}\pi\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^3 + xy^2} & : (x,y) : x \neq 0 \\ 0 & : (x,y) : x = 0 \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+xy^2}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^3+xy^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^4 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}{\varrho^3 \cos\vartheta\left(\cos^2\vartheta + \operatorname{sen}^2\vartheta\right)} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta = 0$, la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta\right| \le 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h^2 \cdot 0 - 0}{(h^3+0)\cdot h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$.
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+xy^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:
$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^3+xy^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^4 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta}{\varrho^4 \cos\vartheta} = \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\vartheta = 0$ solo per valori particolari di $\vartheta$ e quindi la funzione non risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = 2x^3 + y^3 - z^3 - 2xyz = 0$, ed il punto $P = (1,1,1)$ nel quale è soddisfatta, si verifichi che con essa è possibile definire una funzione implicita $z = z(x,y)$, della quale calcolare poi i differenziali totali primo e secondo, d$z$ e d$^2z$.

La funzione $f(x,y,z)$, essendo un polinomio, è differenziabile $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Avremo poi:
$\nabla f(x,y,z) = \left(6x^2 - 2yz; 3y^2 - 2xz; -3z^2 - 2xy\right)$ e quindi $\nabla f(1,1,1) = (4;1;-5)$.
Essendo $f'_z(1,1,1) = -5 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $z = z(x,y)$.
Sarà quindi, nel punto $(1,1)$:
$\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\dfrac{f'_x(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\dfrac{4}{-5} = \dfrac{4}{5}$ e
$\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\dfrac{f'_y(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)} = -\dfrac{1}{-5} = \dfrac{1}{5}$.
Sarà quindi $\mathrm{d}z = \dfrac{4}{5}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{d}y$.
Avremo poi : $\mathbb{H}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} 12x & -2z & -2y \\ -2z & 6y & -2x \\ -2y & -2x & -6z \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(1,1,1) = \begin{Vmatrix} 12 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{Vmatrix}$.
Sappiamo che $\mathrm{d}^2z = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x,y,z)}{f'_z}$ e quindi:
$\mathrm{d}^2z = -\dfrac{12(\mathrm{d}x)^2 + 6(\mathrm{d}y)^2 - 6(\mathrm{d}z)^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 4\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(-5)}$ nella quale poi dobbiamo sostituire $\mathrm{d}z = \dfrac{4}{5}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{5}\,\mathrm{d}y$ ed avremo: $\mathrm{d}^2z =$
$$= \frac{12(\mathrm{d}x)^2 + 6(\mathrm{d}y)^2 - 6\left(\frac{4}{5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\,\mathrm{d}y\right)^2 - 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}x\left(\frac{4}{5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\,\mathrm{d}y\right) - 4\mathrm{d}y\left(\frac{4}{5}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\,\mathrm{d}y\right)}{5}$$
$$= \frac{124}{125}(\mathrm{d}x)^2 + \frac{124}{125}(\mathrm{d}y)^2 - \frac{248}{125}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x+y} - e^x - e^y$, determinare tutti i punti $(x,y)$ nei quali risulti $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, dove $v$ è il versore di $(1,-1)$. Tra tutti questi punti determinare quello in cui risulta $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = -1$.

La funzione $f(x,y) = e^{x+y} - e^x - e^y$ è sempre differenziabile, per cui sarà:
$\mathcal{D}_v f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v$. Essendo:
$\nabla f(x,y) = (e^{x+y} - e^x; e^{x+y} - e^y)$, $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avremo allora:
$\mathcal{D}_v f(x,y) = (e^{x+y} - e^x; e^{x+y} - e^y) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) =$
$\mathcal{D}_v f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e^{x+y} - e^x - e^{x+y} + e^y) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,(e^y - e^x) = 0$ se $x = y$.

Risulta poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix} e^{x+y}-e^x & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y}-e^y \end{matrix}\right\| \Rightarrow \mathbb{H}(x,x)=\left\|\begin{matrix} e^{2x}-e^x & e^{2x} \\ e^{2x} & e^{2x}-e^x \end{matrix}\right\|$.

Dato che la funzione $f(x,y)$ è differenziabile due volte sarà:

$$\mathcal{D}^2_{v,v}f(x,y)=\left\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} e^{2x}-e^x & e^{2x} \\ e^{2x} & e^{2x}-e^x \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix}\right\|=$$

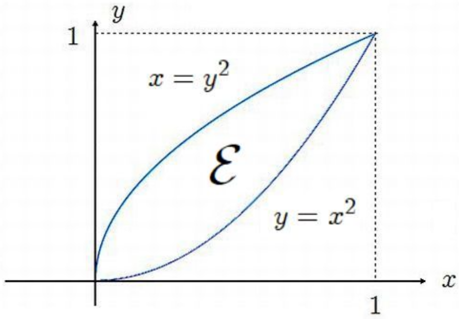
$$=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} e^{2x}-e^x & e^{2x} \\ e^{2x} & e^{2x}-e^x \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} e^{2x}-e^x-e^{2x} \\ e^{2x}-e^{2x}+e^x \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix} -e^x \\ e^x \end{matrix}\right\|=$$

$=\frac{1}{2}\cdot(-e^x-e^x)=-e^x=-1$ se $x=0\Rightarrow y=0\Rightarrow(0,0)$ è il punto cercato..

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x^2-y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2\le y \\ y^2\le x \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.




Scriviamo il problema nella forma: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x^2-y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2-y\le 0 \\ y^2-x\le 0 \end{cases} \end{cases}$

Formiamo la funzione lagrangiana:

$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2-y^2-\lambda_1(x^2-y)-\lambda_2(y^2-x)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x=2x=0 \\ \Lambda'_y=-2y=0 \\ x^2-y\le 0 \\ y^2-x\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0-0\le 0 \\ 0-0\le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\mathbb{H}(0,0)=\left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{matrix}\right\|$ da $|\mathbb{H}_2|<0$ segue che $(0,0)$ è un punto di sella.

Teniamo comunque presente che $(0,0)$ sta sulla frontiera della regione ammissibile $\mathcal{E}$.

2) caso $\lambda_1\ne 0,\lambda_2=0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x\,(1-\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = \,-\,2y + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 \\ y^2 - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 - 0 \le 0 \end{cases} \text{(già visto)} \cup$$

$$\cup \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ y = \frac{1}{2}\,\lambda_1 = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 - x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 > 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{vera} \end{cases} \text{(forse P. Max ?)} \cup$$

$$\cup \begin{cases} x = \,-\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 > 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{falsa} \end{cases} \quad \left(-\,\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) \notin \mathcal{E}\,.$$

Conosciamo già la natura del punto $(0,0)$ mentre $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, dato che $\lambda_1 = 1 > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = \,-\,2y - 2\lambda_2 y = \,-\,2y\,(1+\lambda_2) = 0 \\ y^2 = x \\ x^2 - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \lambda_2 = \,-\,2x = 0 \\ 0 - 0 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 \le 0 \end{cases} \text{(già visto)} \cup$$

$$\cup \begin{cases} \lambda_2 = \,-\,1 \\ x = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 - y \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = \,-\,1 < 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{vera} \end{cases} \text{(forse P. Min ?)} \cup$$

$$\cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \,-\,\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_2 = \,-\,1 < 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \le 0 : \text{falsa} \end{cases} \quad \left(\frac{1}{2}, -\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \notin \mathcal{E}\,.$$

Conosciamo già la natura del punto $(0,0)$ mentre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, dato che $\lambda_2 = \,-\,1 < 0$ potrebbe essere un punto di Minimo.

4) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$ :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 = x \\ y^2 = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^3-1) = 0 \\ y = \,+\,\sqrt{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = -2y + \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = -2y + \lambda_1 - 2\lambda_2 y = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 4 - 4\lambda_2 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 2 + 2\lambda_2 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3\lambda_2 = -2 \\ \lambda_1 = 2 + 2\lambda_2 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3} < 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

. Dato che $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 = \ < 0$ il punto $(1,1)$ non è nè punto di Massimo nè punto di Minimo.

Per il Teorema di Weierstrass, avendo trovato un solo candidato sia per il punto di Massimo che per il punto di Minimo, avremo che $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ è il punto di Massimo mentre $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$ è il punto di Minimo.

II M 2) Data una funzione derivabile $f(x)$, si definisce l'elasticità di tale funzione come: $\mathcal{E}(f) = \dfrac{x \cdot f'}{f}$. Determinare tutte le funzioni tali che $y = \mathcal{E}(y)$.

Si tratta di risolvere l'equazione differenziale $y = \dfrac{x \cdot y'}{y}$ che, posto $y \neq 0$, equivale alla: $y^2 = x \cdot y'$, ovvero un'equazione a variabili separabili per cui avremo:
$\dfrac{1}{y^2}\, y' = \dfrac{1}{x}$ dalla quale integrando $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\, y' \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + k$ e quindi:
$-\dfrac{1}{y} = \log x + k \Rightarrow \dfrac{1}{y} = m - \log x \Rightarrow y = \dfrac{1}{m - \log x}$ che rappresenta la soluzione generale dell'equazione.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = 3x - 6y + t \\ y' = -3y - t^2 \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = 3x - 6y + t \\ y' = -3y - t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - 3x + 6y = t \\ y' + 3y = -t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D-3 & 6 \\ 0 & D+3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ -t^2 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-3 & 6 \\ 0 & D+3 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} t & 6 \\ -t^2 & D+3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2 - 9\right)(x) = 1 + 3t + 6t^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' - 9x = 1 + 3t + 6t^2.$$

Da $x'' - 9x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 9 = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2\, e^{-3t}$.
Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, dato che $D^3\left(1 + 3t + 6t^2\right) = 0$, non essendoci annichilatori in comune con l'equazione, possiamo ipotizzare una soluzione partico-

lare del tipo : $x_0 = a\,t^2 + bt + c \Rightarrow x_0' = 2at + b \Rightarrow x_0'' = 2a$ dalla quale, sostituendo nella $x'' - 9x = 1 + 3t + 6t^2$ otteniamo:

$$2a - 9\big(a\,t^2 + bt + c\big) = 1 + 3t + 6t^2 \Rightarrow\ -9at^2 - 9bt + 2a - 9c = 1 + 3t + 6t^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -9a = 6 \\ -9b = 3 \\ 2a - 9c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2}{3} \\ b = -\frac{1}{3} \\ c = \frac{1}{9}(2a-1) = \frac{1}{9}\Big(-\frac{4}{3} - 1\Big) = -\frac{7}{27} \end{cases}.$$

Sarà quindi $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2\,e^{-3t} - \dfrac{2}{3}\,t^2 - \dfrac{1}{3}\,t - \dfrac{7}{27}$. Dalla prima equazione ricaviamo:

$y = \dfrac{1}{2}\,x - \dfrac{1}{6}x' + \dfrac{1}{6}\,t$ e quindi:

$y(t) = \dfrac{c_1}{2}e^{3t} + \dfrac{c_2}{2}\,e^{-3t} - \dfrac{1}{3}\,t^2 - \dfrac{1}{6}\,t - \dfrac{7}{54} - \dfrac{c_1}{2}e^{3t} + \dfrac{c_2}{2}\,e^{-3t} + \dfrac{2}{9}\,t + \dfrac{1}{18} + \dfrac{1}{6}\,t$ ovvero:

$y(t) = c_2\,e^{-3t} - \dfrac{1}{3}\,t^2 + \dfrac{2}{9}\,t - \dfrac{2}{27}$ e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{3t} + c_2\,e^{-3t} - \frac{2}{3}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t - \frac{7}{27} \\ y(t) = c_2\,e^{-3t} - \frac{1}{3}\,t^2 + \frac{2}{9}\,t - \frac{2}{27} \end{cases}.$$

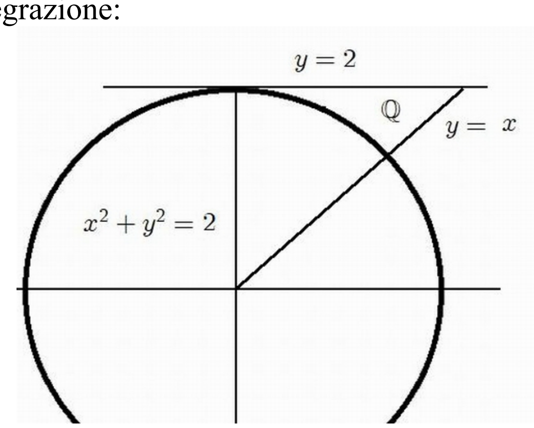
Da $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{7}{27} = 1 \\ c_2 - \frac{2}{27} = -1 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} c_1 = 1 + \frac{7}{27} - c_2 = \frac{59}{27} \\ c_2 = -1 + \frac{2}{27} = -\frac{25}{27} \end{cases}$

e quindi la soluzione particolare $\begin{cases} x(t) = \frac{59}{27}e^{3t} - \frac{25}{27}\,e^{-3t} - \frac{2}{3}\,t^2 - \frac{1}{3}\,t - \frac{7}{27} \\ y(t) = -\frac{25}{27}\,e^{-3t} - \frac{1}{3}\,t^2 + \frac{2}{9}\,t - \frac{2}{27} \end{cases}.$

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x;\ x \le y \le 2; 4 \le x^2 + y^2\big\}$, calcolare:

$\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ mediante opportuna sostituzione in coordinate polari.

Vista la regione di integrazione:




operando la sostituzione in coordinate polari, da $y = 2 \Rightarrow \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 2 \Rightarrow \varrho = \dfrac{2}{\mathrm{sen}\,\vartheta}$, e quindi otteniamo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2}^{\frac{2}{\mathrm{sen}\,\vartheta}} \varrho^2 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2}^{\frac{2}{\mathrm{sen}\,\vartheta}} \varrho^3 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\,\varrho^4\Big|_{2}^{\frac{2}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}\right) \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4}\left(\frac{16}{\mathrm{sen}^4\,\vartheta} - 16\right) \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\operatorname{sen}^3 \vartheta} \cos \vartheta - 4 \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta \, \mathrm{d}\vartheta = 4 \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \vartheta} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \vartheta \right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4 \left[ \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \left( -1 - \frac{1}{4} \right) \right] = 4 \left[ -1 + \frac{5}{4} \right] = 1 \, .$$