COMPITO di ANALISI MATEMATICA 8/2/2022

I M 1) Determinare le radici dell'equazione $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$.

Da $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = x^4\left(x^2 + 1\right) + x^2 + 1 = \left(x^2 + 1\right)\left(x^4 + 1\right) = 0$
otteniamo $x = \sqrt{-1}$ e $x = \sqrt[4]{-1}$. Essendo $-1 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$ avremo:
$\sqrt{-1} = \sqrt{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\,\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\,\frac{2\pi}{2}\right)\right), 0 \le k \le 1$ da cui:
Per $k = 0$: $1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = i$;
per $k = 1$: $1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i$.
$\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + k\,\frac{2\pi}{4}\right)\right), 0 \le k \le 3$ da cui:
Per $k = 0$: $\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
per $k = 1$: $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
per $k = 2$: $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
per $k = 3$: $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$.

I M 2) Verificare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{\varrho^5}\cos\vartheta\,\sqrt[3]{\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\varrho} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \sqrt[3]{\varrho^2}\cos\vartheta\,\sqrt[3]{\mathrm{sen}^2\,\vartheta} = 0$;
la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos\vartheta\,\sqrt[3]{\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\right| \le 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h \cdot \sqrt[3]{0} - 0}{\sqrt{h^2 + 0}} \cdot \frac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$;
$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{0 \cdot \sqrt[3]{h^2} - 0}{\sqrt{0 + h^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$.
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{\varrho^5}\cos\vartheta \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\vartheta}}{\varrho^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\cos\vartheta \sqrt[3]{\operatorname{sen}^2\vartheta}}{\sqrt[3]{\varrho}}$ che certamente, vista la presenza del ϱ solo a denominatore, non sarà uguale a 0 e quindi la funzione non risulta differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = x\,e^y - y\,e^z - z\,e^w + w\,e^x = 0 \\ g(x,y,z,w) = xyz - yzw - xzw + xyw = 0 \end{cases}$ determinare se con esso si può definire una funzione implicita in un intorno del punto $\mathrm{P}_0 = (1,\,-1,1,\,-1)$.
Se tale funzione esiste se ne calcolino le derivate prime.

Le funzioni $f(x,y,z,w)$ e $g(x,y,z,w)$ sono chiaramente differenziabili $\forall\,(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$.
Avremo poi:

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z,w)} = \begin{Vmatrix} e^y + w\,e^x & x\,e^y - e^z & -\,y\,e^z - e^w & -\,z\,e^w + e^x \\ yz - zw + yw & xz - zw + xw & xy - yw - xw & -\,yz - xz + xy \end{Vmatrix}$$

da cui $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z,w)}(1,\,-1,1,\,-1) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{e} - e & \frac{1}{e} - e & e - \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{Vmatrix}$.

In questa matrice Jacobiana la prima e la seconda colonna sono uguali tra loro, così come sono uguali tra loro la terza e la quarta colonna. Ma prima e seconda colonna sono l'opposto della terza e quarta colonna, quindi la caratteristica della matrice Jacobiana è pari a 1 e non si può trovare un minore di ordine 2 diverso da 0. Non sono soddisfatte le ipotesi del Teorema del Dini e quindi non è garantita l'esistenza di una funzione implicita $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2\,y^2$, sia v il versore di $(1,1)$. Determinare i punti P_0 nei quali $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = 0$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0) = 2$.

La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2\,y^2$, essendo un polinomio, è ovunque differenziabile due volte, per cui sarà: $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0) = v \cdot \mathbb{H}(\mathrm{P}_0) \cdot v^T$.

Essendo: $\nabla f(x,y) = \left(2x - 2xy^2; 2y - 2x^2y\right)$, $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 - 2y^2 & -\,4xy \\ -\,4xy & 2 - 2x^2 \end{Vmatrix}$

e $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, avremo allora:

$\mathcal{D}_v f(x,y) = \left(2x - 2xy^2; 2y - 2x^2y\right) \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(2x + 2y - 2xy(x+y)\right) = 0$ e quindi $\mathcal{D}_v f(x,y) = \sqrt{2}(x+y)(1-xy) = 0$. Poi

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 - 2y^2 & -\,4xy \\ -\,4xy & 2 - 2x^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 - 2y^2 & -\,4xy \\ -\,4xy & 2 - 2x^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 - 2y^2 - 4xy \\ 2 - 2x^2 - 4xy \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2 - 2y^2 - 4xy + 2 - 2x^2 - 4xy\right) = 2 - x^2 - y^2 - 4xy = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4xy = 0.$$

Abbiamo quindi il sistema $\begin{cases} (x+y)(1-xy) = 0 \\ x^2 + y^2 + 4xy = 0 \end{cases}$ dal quale otteniamo:

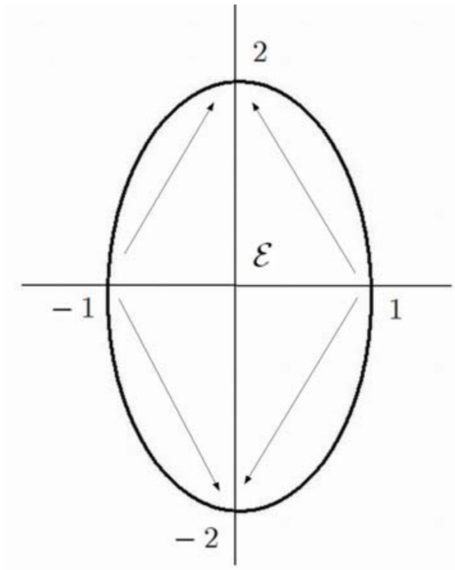
$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+y^2+4xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\,-x \\ x^2+x^2-4x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ e anche

$\begin{cases} 1-xy=0 \\ x^2+y^2+4xy=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \text{posto } x \neq 0 \\ x^2+\frac{1}{x^2}+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x} \\ x^4+4x^2+1=0 \end{cases}.$

Ma $x^4+4x^2+1=0$, in quanto somma di termini tutti positivi, non ammette soluzioni e quindi l'unico punto soluzione è $P_1=(0,0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{s.v.: } 4x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}.$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto (ellisse), il vincolo è qualificato, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.



Scriviamo il problema nella forma: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=x^2+y^2 \\ \text{s.v.: } 4x^2+y^2-4 \leq 0 \end{cases}.$

Formiamo la funzione lagrangiana:

$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=x^2+y^2-\lambda\left(4x^2+y^2-4\right)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda=0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x=2x=0 \\ \Lambda'_y=2y=0 \\ 4x^2+y^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0+0 \leq 4 \end{cases}.$

Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\mathbb{H}(0,0)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1|=2>0 \\ |\mathbb{H}_2|=4>0 \end{cases}$ segue che $(0,0)$ è un punto di minimo.

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 8\lambda x = 2x\,(1-4\lambda) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - 2\lambda y = 2y\,(1-\lambda) = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 + 0 \le 4 \end{cases} \text{ già visto oppure}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ \lambda = 1 > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \lambda = 1 > 0 \end{cases} \text{ (forse P. Max ?) oppure}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{4} \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ \lambda = \frac{1}{4} > 0 \end{cases} \text{ (forse P. Max ?).}$$

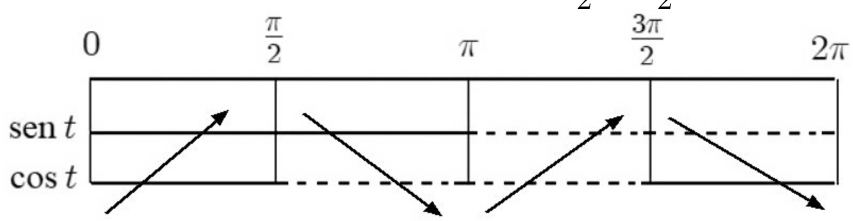
Il caso $\begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = \frac{1}{4} \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ non ha ovviamente soluzioni.

Studiamo la funzione sui soli punti del vincolo.

Scrivendo l'ellisse in coordinate polari $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\,\mathrm{sen}\, t \end{cases}$ avremo:

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(t) = \cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2 t \Rightarrow f'(t) = 2\cos t\,(-\mathrm{sen}\, t) + 8\,\mathrm{sen}\, t\cos t \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(t) = 6\,\mathrm{sen}\, t\cos t \ge 0$. Essendo :

$\mathrm{sen}\, t \ge 0$ per $0 \le t \le \pi$ mentre $\cos t \ge 0$ per $0 \le t \le \frac{\pi}{2} \cup \frac{3\pi}{2} \le t \le 2\pi$ risulta:



Per cui i punti $(0,2)$ e $(0,-2)$, con $f(0,2) = f(0,-2) = 4$ risultano punti di massimo come indicato dal segno dei moltiplicatori, mentre i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$ risultano di minimo ma solo relativamente ai punti della frontiera di $\mathcal{E}$ e quindi non sono nè di massimo nè di minimo.

Il punto $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$ risulta il punto di minimo del problema.

Si sarebbe potuto anche, da $4x^2 + y^2 = 4$ ricavare $y^2 = 4 - 4x^2$ da cui sostituendo:

$f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x) = x^2 + 4 - 4x^2 = 4 - 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -6x \ge 0$ per $x \le 0$

che avrebbe portato alle stesse conclusioni (vedere frecce in figura).

II M 2) Analizzare la natura del punto stazionario della funzione $f(x,y) = e^{xy - x^2 - y^2}$.

La funzione è chiaramente una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha: $\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = (y - 2x)\, e^{xy-x^2-y^2} = 0 \\ f'_y = (x - 2y)\, e^{xy-x^2-y^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2x = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Da $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} \left((y-2x)^2 - 2\right) e^{xy-x^2-y^2} & (1 + (y-2x)(x-2y))\, e^{xy-x^2-y^2} \\ (1 + (y-2x)(x-2y))\, e^{xy-x^2-y^2} & \left((x-2y)^2 - 2\right) e^{xy-x^2-y^2} \end{Vmatrix}$

da cui otteniamo $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{Vmatrix}$ per cui da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -2 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 3 > 0 \end{cases}$ segue che $(0,0)$ è un punto di massimo.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - y = 1 \\ 3x + y' - 5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D-1 & -1 \\ 3 & D-5 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ 3 & D-5 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & D-5 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2 - 6D + 8\right)(x) = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'' - 6x' + 8x = -5\,.$$

Da $x'' - 6x' + 8x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{4t}$.

Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, dato che $D(-5) = 0$, non essendoci annichilatori in comune con l'equazione, possiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo : $x_0 = k \Rightarrow x_0' = x_0'' = 0$ dalle quali, sostituendo nella $x'' - 6x' + 8x = -5$ otteniamo: $8k = -5 \Rightarrow k = -\dfrac{5}{8}$. Sarà quindi $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{4t} - \dfrac{5}{8}$.

Dalla prima equazione ricaviamo $y = x' - x - 1$ e quindi:

$y(t) = 2c_1 e^{2t} + 4c_2\, e^{4t} - c_1 e^{2t} - c_2\, e^{4t} + \dfrac{5}{8} - 1$ ovvero:

$y(t) = c_1 e^{2t} + 3c_2\, e^{4t} - \dfrac{3}{8}$ e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{4t} - \frac{5}{8} \\ y(t) = c_1 e^{2t} + 3c_2\, e^{4t} - \frac{3}{8} \end{cases}.$$

Da $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} c_1 + c_2 - \frac{5}{8} = 0 \\ c_1 + 3c_2 - \frac{3}{8} = 1 \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{5}{8} \\ c_1 + 3c_2 = \frac{11}{8} \end{cases}$ da cui:

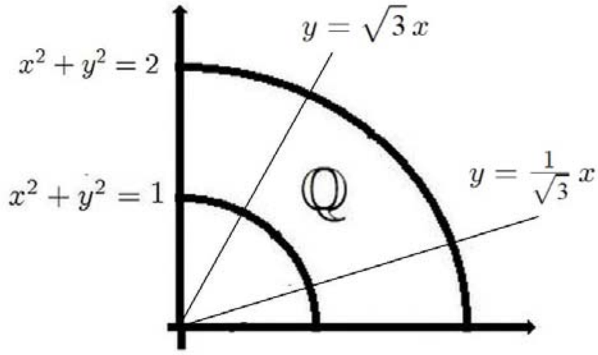
$\begin{cases} c_1 = \frac{5}{8} - c_2 \\ \frac{5}{8} - c_2 + 3c_2 = \frac{11}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5}{8} - c_2 \\ 2c_2 = \frac{6}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{3}{8} \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare $\begin{cases} x(t) = \frac{1}{4}\, e^{2t} + \frac{3}{8}\, e^{4t} - \frac{5}{8} \\ y(t) = \frac{1}{4}\, e^{2t} + \frac{9}{8}\, e^{4t} - \frac{3}{8} \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\, x \le y \le \sqrt{3}\, x\right\}$, calcolare :

$\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ mediante opportuna sostituzione in coordinate polari.

Vista la regione di integrazione:

$$\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\, x \le y \le \sqrt{3}\, x\right\}$$



operando la sostituzione in coordinate polari $\begin{cases} x = \varrho \cos\vartheta \\ y = \varrho \operatorname{sen}\vartheta \end{cases}$ otteniamo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2} \cdot \varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{\sqrt{2}} \varrho^2 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{3}\varrho^3 \Big|_1^{\sqrt{2}} \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(-\frac{1}{3}\cos^3\vartheta \,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\cos^3\vartheta\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left[\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right] = .$$

$$= \frac{1}{72}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(3\sqrt{3}-1\right).$$