COMPITO di ANALISI MATEMATICA 14/3/2022

I M 1) Se una delle tre radici cubiche di un numero z risulta $z_1 = 1 + i$, determinare modulo ed argomento delle altre due radici cubiche e determinare poi il numero z.

Dato che $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$, considerato che le tre radici cubiche formano i vertici di un triangolo equilatero, se il primo argomento è dato da $\frac{\pi}{4}$, il secondo sarà dato da $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\,\pi}{12}$ ed il terzo da $\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3} = \frac{19\,\pi}{12}$. Il modulo sarà per tutti uguale a $\sqrt{2}$. Se $z_1 = 1 + i = \sqrt[3]{z}$ sarà infine $z = (1+i)^3$ e quindi:

$$z = \left(\sqrt{2}\right)^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(3\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 + 2i\,.$$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In caso di risposta affermativa, determinare poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0}\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta = 0\,;$$

la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right| \leq 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot 0 - 0}{\sqrt{h^2+0}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot h^2 - 0}{\sqrt{0+h^2}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\cdot y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta = 0$; la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right| \leq 1$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x\,e^y + y\,e^z - 2z\,e^x = 0$ soddisfatta nel punto $\mathrm{P}_0 = (0,0,0)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $(x,y) \to z$ e di questa calcolare $\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}^2 z$.

La funzione $f(x,y,z)$ è differenziabile due volte $\forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Avremo poi:
$\nabla f(x,y,z) = (e^y - 2z\,e^x; x\,e^y + e^z; y\,e^z - 2\,e^x)$ e quindi $\nabla f(0,0,0) = (1;1;-2)$.
Essendo $f'_z(0,0,0) = -2 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $z = z(x,y)$.
Sarà quindi, nel punto $(0,0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,0) = -\frac{f'_x(0,0,0)}{f'_z(0,0,0)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,0) = -\frac{f'_y(0,0,0)}{f'_z(0,0,0)} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}.$$

Sarà quindi $\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$.

Avremo poi : $\mathbb{H}(x,y,z) = \begin{Vmatrix} -2z\,e^x & e^y & -2\,e^x \\ e^y & x\,e^y & e^z \\ -2\,e^x & e^z & y\,e^z \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}(0,0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Sappiamo che $\mathrm{d}^2 z = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x,y,z)}{f'_z}$ e quindi:

$\mathrm{d}^2 z = -\dfrac{0\,(\mathrm{d}x)^2 + 0\,(\mathrm{d}y)^2 + 0\,(\mathrm{d}z)^2 + 2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(-2)}$ nella quale poi dobbiamo sostituire $\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$ ed avremo:

$$\mathrm{d}^2 z = \frac{2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 4\mathrm{d}x\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) + 2\mathrm{d}y\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right)}{2} = -(\mathrm{d}x)^2 + \frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{1}{2}(\mathrm{d}y)^2.$$

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3$, siano v e w i versori di $(1,1)$ e $(-1,1)$. Determinare i punti P_0 nei quali $\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = 3$.

La funzione $f(x,y) = x^3 - y^3$, essendo un polinomio, è ovunque differenziabile due volte, per cui sarà: $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = \nabla f(\mathrm{P}_0) \cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = v \cdot \mathbb{H}(\mathrm{P}_0) \cdot w^T$.

Essendo: $\nabla f(x,y) = \left(3x^2; -3y^2\right)$ da cui $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{Vmatrix}$ e $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $w = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avremo allora:

$$\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -6x \\ -6y \end{Vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot (6x + 6y) = 3 \Rightarrow x + y = -1 \Rightarrow y = -x - 1.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \le y \le x + 1 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - y - 1 \le 0 \\ y - x - 1 \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = xy - \lambda_1\big(x^2 - y - 1\big) - \lambda_2(y - x - 1)\,.$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2 - y - 1 \le 0 \\ y - x - 1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 \le 0 \\ -1 \le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(0, 0) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| < 0$ segue che $(0, 0)$ è un punto di sella.
Teniamo comunque presente che $(0, 0)$ sta sulla frontiera della regione ammissibile $\mathcal{E}$.

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y - x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 x = -2\lambda_1^2 \\ -2\lambda_1^2 = \lambda_1^2 - 1 \\ y - x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 x = -2\lambda_1^2 \\ 3\lambda_1^2 = 1 \\ y - x \le 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 x = -2\lambda_1^2 \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{3} \\ y - x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{2}{3} \\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0 \\ -\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \le 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -\frac{2}{3} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \\ -\frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} \le 1 \end{cases}.$$

Il punto $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$, con $\lambda_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo mentre il punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$, con $\lambda_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = x + 1 \\ x^2 - y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ -\lambda_2 = \lambda_2 + 1 \\ x^2 - y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 = -1 \\ x^2 - y \le 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \le 1 \end{cases}.$$

Il punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, con $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} < 0$ potrebbe essere un punto di Minimo.

4) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = x + 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

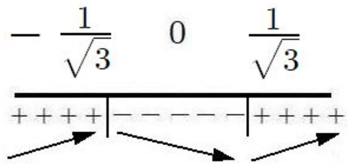
$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 1 + \lambda_2 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{3} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3} < 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Dato che $\lambda_1 = \dfrac{1}{3} > 0$ mentre $\lambda_2 = -\dfrac{2}{3} < 0$ il punto $(-1, 0)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

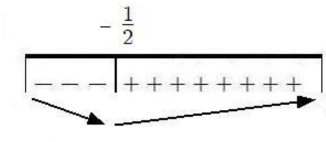
$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = \lambda_1 + 2 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{5}{3} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{11}{3} > 0 \\ x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Dato che $\lambda_1 = \dfrac{5}{3} > 0$ e $\lambda_2 = \dfrac{11}{3} > 0$, il punto $(2, 3)$ potrebbe essere un punto di Massimo.

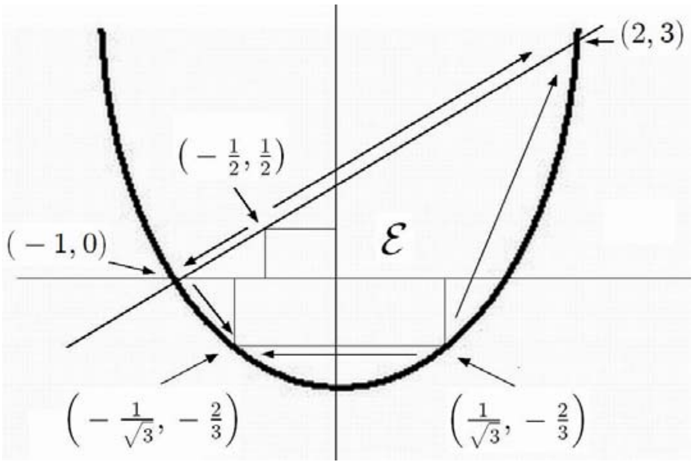
Studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.
Se $y = x^2 - 1$ risulta $f\left(x, x^2 - 1\right) = x^3 - x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1$. Quindi:
$f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 0$ per $x \leq -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \cup \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leq x$ e quindi il punto $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$ è un punto di Massimo mentre il punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$ è un punto di minimo:



Se $y = x + 1$ risulta $f(x, x + 1) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$. Quindi:
$f'(x) = 2x + 1 \geq 0$ per $-\dfrac{1}{2} \leq x$ e quindi il punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ è un punto di Minimo:



Avremo quindi che il punto $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$ con $f\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ è un punto di massimo relativo mentre il punto $(2, 3)$, con $f(2, 3) = 6$ è il punto di massimo assoluto.
Il punto $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right)$ con $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ è il punto di minimo assoluto mentre il punto $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, con $f\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$ è il punto di minimo relativo.



II M 2) Studiare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = 2x + 3y - e^x - y^3$.

La funzione è chiaramente una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha: $\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2 - e^x = 0 \\ f'_y = 3 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x = 2 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log 2 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \log 2 \\ y = -1 \end{cases}$.

Da $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & -6y \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(\log 2, 1) = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix}$ per cui da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -2 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 18 > 0 \end{cases}$ segue che $(\log 2, 1)$ è un punto di massimo;

$\mathbb{H}(\log 2, -1) = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$ per cui da $|\mathbb{H}_2| = -12 < 0$ segue che $(\log 2, -1)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y \cdot y' = x \cdot (1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Si tratta di una equazione a variabili separabili.

Da $y \cdot y' = x \cdot \left(1 + y^2\right)$ otteniamo $\dfrac{y}{1 + y^2} \cdot y' = x$ e passando ad integrare otteniamo:

$\displaystyle\int \frac{y}{1+y^2} \cdot y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{y}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \int x \, \mathrm{d}x + k$ e quindi:

$\dfrac{1}{2} \log\left(1 + y^2\right) = \dfrac{x^2}{2} + k \Rightarrow \log\left(1 + y^2\right) = x^2 + m \Rightarrow 1 + y^2 = e^{x^2+m} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = e^{x^2+m} - 1 \Rightarrow y = \pm\sqrt{e^{x^2+m} - 1}$.

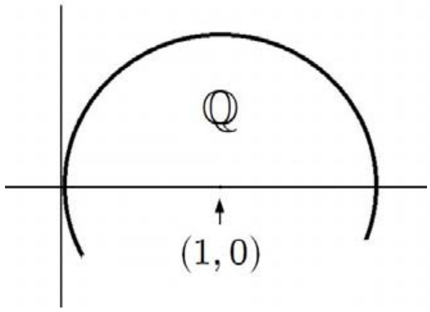
Dato che $y(0) = 1$ dobbiamo scegliere la soluzione positiva ed avremo:

$y(0) = \sqrt{e^{0+m} - 1} = 1 \Rightarrow e^m - 1 = 1 \Rightarrow e^m = 2 \Rightarrow m = \log 2$ e quindi la soluzione particolare del problema sarà $y = \sqrt{e^{x^2+\log 2} - 1} = \sqrt{2\,e^{x^2} - 1}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ (x-1)^2 + y^2 \le 1, 0 \le y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:

$\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ (x-1)^2 + y^2 \le 1, 0 \le y\right\}$



avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\, y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \right. x \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(1-(x-1)^2\right) x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 x - x^3 + 2x^2 - x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^2 2x^2 - x^3 \,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\, x^3 - \frac{1}{4}\, x^4 \Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = \frac{2}{3}\,.\right.$$