COMPITO di ANALISI MATEMATICA 27/6/2022

I M 1) Se $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, calcolare le due radici quadrate del numero z^3.

Essendo $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i = \cos\frac{5\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{3}$ sarà $z^3 = \cos\left(3 \cdot \frac{5\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(3 \cdot \frac{5\pi}{3}\right)$
ovvero $z^3 = \cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi = \cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$ e quindi:
$\sqrt{z^3} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $0 \le k \le 1$ e quindi:
$k = 0 : \cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = i\,;$
$k = 1 : \cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = -i\,.$

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In caso di risposta affermativa, determinare poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Calcoliamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to0} \frac{\varrho^{\frac{7}{3}}\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta}}{\varrho} = \lim_{\varrho\to0} \varrho^{\frac{4}{3}}\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta} = 0\,;$$

la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta}\right| \le 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$ se $k = 0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{h^2 \cdot 0 - 0}{\sqrt{h^2+0}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0} \frac{0 \cdot \sqrt[3]{h} - 0}{\sqrt{0+h^2}} \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varrho^{\frac{7}{3}}\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta}}{\varrho^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to0} \sqrt[3]{\varrho}\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta} = 0$; la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos^2\vartheta\sqrt[3]{\operatorname{sen}\vartheta}\right| \le 1$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=\log\left(x^2+y^2-1\right)=0$ soddisfatta nel punto $P_0=(1,1)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $x\to y(x)$ e di questa calcolare la derivata prima e la derivata seconda nel punto opportuno.

La funzione $f(x,y)=\log\left(x^2+y^2-1\right)$ è differenziabile due volte $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$.
Avremo poi: $\nabla f(x,y)=\left(\dfrac{2x}{x^2+y^2-1};\dfrac{2y}{x^2+y^2-1}\right)$ e quindi $\nabla f(1,1)=(2,2)$.
Essendo $f'_y(1,1)=2\neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $y=y(x)$.
Sarà quindi, nel punto $(1,1)$:
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)=-\dfrac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)}=-\dfrac{2}{2}=-1$. Avremo poi:

$$\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}2\,\frac{y^2-x^2-1}{(x^2+y^2-1)^2} & -\frac{4xy}{(x^2+y^2-1)^2}\\ -\frac{4xy}{(x^2+y^2-1)^2} & 2\,\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2-1)^2}\end{matrix}\right\|\Rightarrow\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}-2 & -4\\ -4 & -2\end{matrix}\right\|.$$

Sappiamo che $y''=-\dfrac{f''_{xx}+2f''_{xy}\,y'+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ e quindi:

$$y''(1)=-\frac{-2-8(-1)-2(-1)^2}{2}=-2.$$

I M 4) Data la funzione $f(x,y)=(x-y)\,e^{x-y}$ ed il versore $v=(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)$, determinare i valori di α per i quali $\mathcal{D}_v f(1,1)=0$ e per questi valori calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,-v}f(1,1)$.

La funzione $f(x,y)=(x-y)\,e^{x-y}$, è ovunque differenziabile due volte, per cui sarà:
$\mathcal{D}_v f(1,1)=\nabla f(1,1)\cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,-v}f(1,1)=v\cdot\mathbb{H}(1,1)\cdot(-v)^T$.
Essendo: $\nabla f(x,y)=\left((x-y+1)\,e^{x-y};(y-x-1)\,e^{x-y}\right)$ avremo anche:
$\nabla f(1,1)=(1;-1)$ e quindi $\mathcal{D}_v f(1,1)=(1;-1)\cdot(\cos\alpha,\operatorname{sen}\alpha)=\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$
e sarà quindi $\mathcal{D}_v f(1,1)=0$ se $\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha$ ovvero se $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ e se $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$.

Risulta poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix}(x-y+2)\,e^{x-y} & (y-x-2)\,e^{x-y}\\ (y-x-2)\,e^{x-y} & (x-y+2)\,e^{x-y}\end{matrix}\right\|$

e quindi $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|$.

Se $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ allora $v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $-v=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ per cui:

$$\mathcal{D}^2_{v,-v}f(1,1)=\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\|=0.$$

Se $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ allora $v=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $-v=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ per cui:

$$\mathcal{D}^2_{v,-v}f(1,1)=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}1\\ 1\end{matrix}\right\|=-\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}0\\ 0\end{matrix}\right\|=0.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2+y^2-1 \le 0 \\ y \le x+1 \end{cases} \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2+y^2-1 \le 0 \\ y-x-1 \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = xy - \lambda_1\big(x^2+y^2-1\big) - \lambda_2(y-x-1)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2+y^2-1 \le 0 \\ y-x-1 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 \le 0 \\ -1 \le 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ da $|\mathbb{H}_2| < 0$ segue che $(0,0)$ è un punto di sella.

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 2\lambda_1 x + x - 2\lambda_1 y = (y+x)(1-2\lambda_1) = 0 \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ 2x^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \le -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{cases}.$$

Il punto $P_1 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2} < 0$ potrebbe essere un punto di Minimo mentre il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ non appartiene alla regione ammissibile $\mathcal{E}$.

Oppure:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda_1 = 0 \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ x - y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ 2x^2 = 1 \\ y \le x+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x \\ x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x^2 = \frac{1}{2} \\ y \leq x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \end{cases}.$$

Il punto $P_2 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, con $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo così come il punto $P_3 : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = x + 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ -\lambda_2 = \lambda_2 + 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -\lambda_2 \\ 2\lambda_2 = -1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \leq 1 \end{cases}.$$

Il punto $P_4 : \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, con $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} < 0$ potrebbe essere un punto di Minimo.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x^2 + 2x + 1 = 1 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

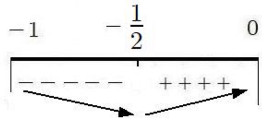
$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = -1 \\ 2\lambda_1 = 1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Dato che $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ mentre $\lambda_2 = -1 < 0$ il punto $(0, 1)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

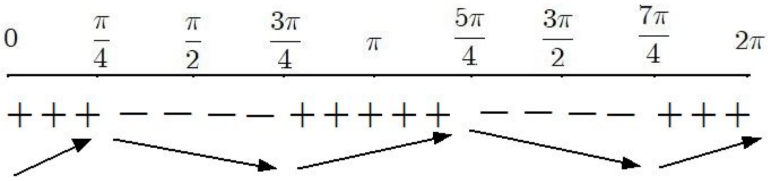
$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Dato che $\lambda_1 = \dfrac{1}{2} > 0$ mentre $\lambda_2 = -1 < 0$ il punto $(-1, 0)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

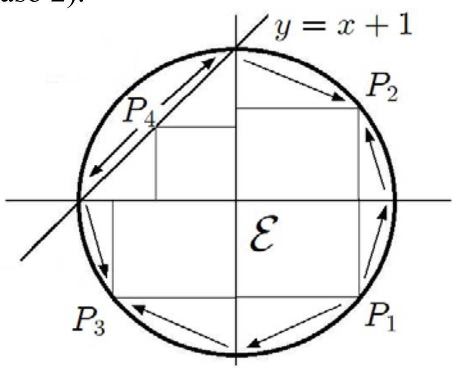
Studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.
Se $y = x + 1$ risulta $f(x, x+1) = x^2 + x \Rightarrow f'(x) = 2x + 1$. Quindi:
$f'(x) = 2x + 1 \geq 0$ per $x \geq -\dfrac{1}{2}$ e quindi il punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ con $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$ risulta un punto di Minimo coerentemente con quanto visto nel caso 3).



Se $x^2 + y^2 = 1$, posto $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}$, avremo $f(t) = \cos t \cdot \operatorname{sen} t = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$. Quindi:
$f'(t) = \cos 2t$ per $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{4} \cup \dfrac{3\pi}{4} \leq t \leq \dfrac{5\pi}{4} \cup \dfrac{7\pi}{4} \leq t \leq 2\pi$.



Quindi i punti $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$ risultano punti di Massimo coerentemente con quanto visto nel caso 2).
Il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ con $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$ risulta un punto di Minimo coerentemente con quanto visto nel caso 2).



II M 2) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - x^2 y$.

La funzione è chiaramente una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha: $\nabla f(x, y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2xy = 2x(1 - y) = 0 \\ f'_y = 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.
Abbiamo quindi tre punti stazionari: $P_0 : (0, 0)$, $P_1 : \left(\sqrt{2}, 1\right)$, $P_2 : \left(-\sqrt{2}, 1\right)$.
Da $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 2 - 2y & -2x \\ -2x & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:
$\mathbb{H}(0, 0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 > 0 \end{cases}$ segue che $(0, 0)$ è un punto di minimo;
$\mathbb{H}\left(\sqrt{2}, 1\right) = \begin{Vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$ per cui da $|\mathbb{H}_2| = -8 < 0$ segue che $\left(\sqrt{2}, 1\right)$ è un punto di sella;
$\mathbb{H}\left(-\sqrt{2}, 1\right) = \begin{Vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$ per cui da $|\mathbb{H}_2| = -8 < 0$ segue che $\left(-\sqrt{2}, 1\right)$ è un punto di sella.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - 3y + e^{2t} \\ y' = 1 - x - y \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = x - 3y + e^{2t} \\ y' = 1 - x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x + 3y = e^{2t} \\ x + y' + y = 1 \end{cases} \Rightarrow \left\| \begin{matrix} D-1 & 3 \\ 1 & D+1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} e^{2t} \\ 1 \end{matrix} \right\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & 3 \\ 1 & D+1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 3 \\ 1 & D+1 \end{vmatrix} \Rightarrow \big(D^2 - 1 - 3\big)(x) = 2e^{2t} + e^{2t} - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \big(D^2 - 4\big)(x) = 3e^{2t} - 3 \Rightarrow x'' - 4x = 3e^{2t} - 3\,.$$

Da $x'' - 4x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t}$.

Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, dato che la soluzione e^{2t} risulta presente anche nel termine noto, generando un annichilatore in comune con l'equazione, dobbiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo : $x_0 = ae^{2t} + bte^{2t} + k$.

Sarà quindi $x_0' = 2ae^{2t} + be^{2t} + 2bte^{2t}$ e $x_0'' = 4ae^{2t} + 2be^{2t} + 2be^{2t} + 4bte^{2t}$

da cui sostituendo: $4ae^{2t} + 4be^{2t} + 4bte^{2t} - 4ae^{2t} - 4bte^{2t} - 4k = 3e^{2t} - 3$ da cui:

$4be^{2t} - 4k = 3e^{2t} - 3$ da cui $\begin{cases} 4b = 3 \\ 4k = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4} \\ k = \frac{3}{4} \end{cases}$ e quindi la soluzione generale della non omogenea sarà: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t} + \dfrac{3}{4}\, te^{2t} + \dfrac{3}{4}$.

Dalla $x' - x + 3y = e^{2t}$ otteniamo $y(t) = \dfrac{1}{3}\big(x - x' + e^{2t}\big)$ e quindi:

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t} + \frac{3}{4}\, te^{2t} + \frac{3}{4} - \left(2c_1 e^{2t} - 2c_2\, e^{-2t} + \frac{3}{4}\, e^{2t} + \frac{3}{2}\, te^{2t}\right) + e^{2t}\right)$$

da cui $y(t) = -\dfrac{1}{3} c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t} - \dfrac{1}{4}\, te^{2t} + \dfrac{1}{12}\, e^{2t} + \dfrac{1}{4}$

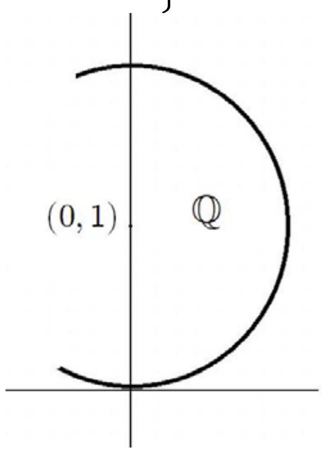
e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t} + \frac{3}{4}\, te^{2t} + \frac{3}{4} \\ y(t) = -\frac{1}{3} c_1 e^{2t} + c_2\, e^{-2t} - \frac{1}{4}\, te^{2t} + \frac{1}{12}\, e^{2t} + \frac{1}{4} \end{cases}.$$

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\!:\ x^2 + (y-1)^2 \le 1, 0 \le x\Big\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:

$\mathbb{Q} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\!:\ x^2 + (y-1)^2 \le 1, 0 \le x\Big\}$



avremo:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}\, x^2 \Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \right) y \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(1 - (y-1)^2\right) y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^2 y - y^3 + 2y^2 - y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_0^2 2y^2 - y^3 \,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\, y^3 - \frac{1}{4}\, y^4 \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{16}{3} - 4 \right) = \frac{2}{3}\,.$$