COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2021/22

Prova Intermedia Anno 2021- Compito $\mathbb{A}1$

1) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $P : [(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})\, e\, non\, \mathbb{C}] \Rightarrow [(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbb{B}]$ nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$ sia sempre falsa.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+5x)^3-1}{(1-3x)^5-1}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5+\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}}\right)^{1+\sqrt{x}}.$$

3) Determinare i valori del parametro k per cui $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos kx}{x^3+x^2} = 5$.
4) Se $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ e $f(g(x)) = \log(x+1)$ si determini l'espressione della funzione $g(x)$ e della sua inversa.
5) Determinare il Campo di esistenza della funzione $f(x) = \log\left(\frac{1-\log x}{e^x+1}\right)$.

Prova Intermedia Novembre 2021- Compito $\mathbb{B}1$

1) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $P : [(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}] \Leftrightarrow [(\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{C})\, o\, \mathbb{B}]$ nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$ sia sempre vera.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2-\cos 2x-\cos 3x}{3^{x^2}-1}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x+x^2}{3+x+x^2}\right)^{x-1}.$$

3) Determinare i valori del parametro k per cui $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos kx}{x^2} = 5$.
4) Se $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ e $f(g(x)) = e^{x-1}$ si determini l'espressione della funzione $g(x)$ e della sua inversa.
5) Determinare il Campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{x\log x}{x^4+1}}$.

I Appello Sessione Invernale 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log^2 x - \log x + 1$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x}-2^x}{\log(1+x)}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4-3x+x^2}{5+3x+2x^2}\right)^{1-\sqrt{x}}.$$

3) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2-x & x<0 \\ e^{kx}-1 & x\geq 0 \end{cases}$, si verifichi che la funzione è continua in $x=0$ per ogni valore del parametro k e si determini poi per quale valore del parametro k la funzione risulta anche derivabile in $x=0$.

4) Data la funzione $f(x) = \log_2 \left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \right)$, determinare il suo Campo d'esistenza, dove risulta invertibile, il dominio, il codominio e l'espressione della sua inversa.
5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\, e^{2x} - e^{-x}\, \mathrm{d}x$.
6) Data la funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, se il differenziale della funzione, calcolato in un punto x_0 per un incremento $\mathrm{d}x = 0,5$, risulta uguale a 4, si determini il punto x_0.
7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 - x^2 + y\, e^y$.
8) Data la matrice $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & k \\ 0 & k & 1 \end{matrix} \right\|$ ed il vettore $\mathbb{X} = \left\| \begin{matrix} k \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|$, si determini:

- per quale valore del parametro k il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ ha modulo uguale a $\sqrt{2}$;
- per quale valore del parametro k il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $(2,3)$;
- per quale valore del parametro k il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(2,3)$;

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $P : [(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}) \Leftrightarrow non\, \mathbb{C}]\, o\, (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}$ è sempre falsa.
10) Verificare che se $f(x)$ è una funzione derivabile due volte e convessa allora anche la funzione $F(x) = e^{f(x)}$ risulta una funzione convessa.

II Appello Sessione Invernale 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 e^x - e^x$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen} x} - e^{-\operatorname{sen} x}}{x}\ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4 + x^2}{3 + x^2} \right)^{3 - x^2}.$$
3) Date $f(x) = 2x$ e $g(x) = e^x - 1$, determinare per quali x_0 risulta $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
4) Date le funzioni $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x^3$, $h(x) = \log x$ determinare l'espressione della funzione composta $F(x) = f(g(h(x)))$ e determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.
5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+1}\, \mathrm{d}x$.
6) Data la funzione $f(x) = e^x - x$, si determini il punto x_0 nel quale risulta soddisfatto il Teorema di Lagrange applicato nell'intervallo $[0,1]$.
7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = 3x + 2y - \log(xy)$.
8) Date le matrici $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|$, $\mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|$ ed il vettore $\mathbb{X} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ k \end{matrix} \right\|$, si determinino i valori del parametro k per i quali il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$.
9) Determinare se la proposizione $P : [(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})] \Leftrightarrow (\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ risulta una tautologia.
10) Determinare gli intervalli dove risulta crescente la funzione $f(x) = \log^2 x - \log^3 x$, determinando poi se i punti di massimo e di minimo trovati siano assoluti o relativi.

Appello Sessione Straordinaria I 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \left(1 - x^2\right) e^x$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right)}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4+3^x}{3+3^x}\right)^{2-3^x}$.

3) Data la funzione $f(x)=\begin{cases} m\,x+q & : -1\le x\le 1 \\ e^{x^2}+1 & : \text{altrimenti}\end{cases}$ determinare se esistono valori dei parametri m e q che rendono la funzione continua su tutto $\mathbb{R}$.

4) Data la funzione $f(x)=e^x-1$ e sapendo che $g^{-1}(x)=e^x+1$, determinare l'espressione della funzione composta $F(x)=f(g(x))$ e l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$.

6) Determinare le equazioni della retta tangente e della perpendicolare alla retta tangente al grafico della funzione $f(x)=e^{-x}\cdot\log\left(1+x\right)$ nel punto di ascissa $x_0=0$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y)=x+3y-e^x-y^3$.

8) Data la matrice $\mathbb{A}=\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & k \\ 0 & k & -1 \\ k & -1 & 1\end{matrix}\right\|$ ed il vettore $\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|$, si determinino i valori del parametro k per i quali il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ ha modulo uguale a 2.

9) Determinare se risultano logicamente equivalenti la proposizione $P_1 : A \Leftrightarrow (B\,e\,C)$ e la proposizione $P_2 : A \Rightarrow [non\,(non\,B\,o\,non\,C)]$

10) Determinare gli intervalli dove risulta convessa la funzione $f(x)=x\cdot\log^2 x$.

I Appello Sessione Estiva 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)=2e^x-e^{-x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-2^x}{3^x-e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+3^x}{1+2^x}\right)^{\frac{1-x}{x}}$.

3) Determinare i valori del parametro k per cui $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\cos x-\cos\left(kx\right)}{x^2}=1$.

4) Se $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ e $f(g(x))=\log x$ si determini l'espressione della funzione $g(x)$ e quella della sua inversa.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

6) Data la funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$ e preso il punto $x_0=8$, mediante la formula del differenziale (Polinomio di Taylor di I grado), calcolare un valore approssimato di $\sqrt[3]{8,12}$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y)=x^2+y^2-x^2y^2$.

8) Data la matrice $\mathbb{A}=\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1\end{matrix}\right\|$ ed il vettore $\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right\|$, si determini il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1,-1,2)$.

9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare l'unico caso nel quale la proposizione $\mathbb{P}_1 : [non\,(\mathbb{B}\Leftrightarrow\mathbb{C})\Rightarrow\mathbb{A}]$ risulta falsa mentre la proposizione $P_2 : \mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C}$ risulta vera.

10) Determinare il Campo di esistenza della funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{e^x-1}{\log\left(x^2+1\right)}\right)$.

II Appello Sessione Estiva 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 + 3x}{1 + 2x} \right)^{1-x}$.
3) Determinare i valori del parametro k per cui $\lim_{x \to 0} \dfrac{3^{kx} - 2^{x}}{x} = 1$.
4) Se $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 1}$ e $g(x) = 3^{x}$, determinare l'espressione dell'inversa della funzione $f(g(x))$.
5) Calcolare $\int_0^1 \dfrac{e^x}{e^x + 1} \, \mathrm{d}x$.
6) Data la funzione $f(x) = e^x - 2x$ determinare il punto x_0 nel quale la retta tangente al grafico della funzione risulta perpendicolare alla retta di equazione $y = 1 - x$.
7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y$.
8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & -1 \\ k & -1 & 1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, si determini il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $(4, 2, 2)$.
9) Date le quattro proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ si costruisca la tavola di verità della proposizione: $P : [(\mathbb{A}\; o\; \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\; e\; \mathbb{D})] \Leftrightarrow non\, \mathbb{B}$ sapendo che la proposizione $\mathbb{A}$ è sempre falsa mentre la proposizione $\mathbb{D}$ è sempre vera.
10) Determinare se e dove risulta convessa oppure concava la funzione $f(x) = \log(\log x)$.

I Appello Sessione Autunnale 2022

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x - \log x$.
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x \to 0} \dfrac{\pi^x - e^x}{x}$; $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{2x} \right)^{1+x}$.
3) Determinare gli eventuali asintoti per il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{e^x}{1 - e^x}$.
4) Date le due funzioni $f(x) = \log(1 + x)$ e $g(x) = \dfrac{x + 1}{x}$, dopo aver costruito la funzione composta $f(g(x))$ se ne determini il dominio e l'espressione della sua funzione inversa.
5) Calcolare $\int_0^1 \sqrt{x + 1} - e^{1-x} \, \mathrm{d}x$.
6) Data la funzione $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, può la retta $y = x + \dfrac{1}{4}$ essere la tangente al grafico della funzione in un opportuno punto x_0 ? In caso di risposta affermativa determinare x_0.
7) Determinare se la funzione $f(x, y) = 2x - x^2 + 3y - y^3$ ammette punti di massimo e/o di minimo relativo.
8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{Vmatrix}$, si determini la matrice $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{Vmatrix}$ tale che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B}$. Verificare se è vero anche che $\mathbb{X} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{B}$.
9) Verificare se la proposizione: $P : [\mathbb{A}\, e\, non\, (\mathbb{B}\, e\, \mathbb{C})] \Leftrightarrow (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B})$, dove $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono tre proposizioni qualunque, risulta una tautologia.
10) Determinare per la funzione $f(x) = \log(\log x)$ l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $x = e$.

$\boxed{\text{II Appello Sessione Autunnale 2022}}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 \, e^{1-x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2 - \sqrt{1+x}}{x} \; ; \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{1 - x + 3^x - 2^x}{\operatorname{sen} x - x} \, .$$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale si ha che $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{1-\cos x} - 1}{k\, x^2} = 2$.

4) Sia $f(x) = e^{2-x}$ e sia $F(x) = f(g(x))$; sapendo che $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{\log x - 1}$ si determini l'espressione della funzione $g(x)$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_1^2 \frac{x+1}{x^2+2x+3} \, \mathrm{d}x$.

6) Data la funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - \dfrac{1}{x}$, si determini l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 1$ e si verifichi se tale retta tangente può intersecare la retta di equazione $y = x - 7$.

7) Determinare se la funzione $f(x,y) = x^2 - x^2\, y + y^2$ ammette punti di massimo e/o di minimo relativo.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{matrix} \right\|$, sia $\mathbb{X}$ un vettore di $\mathbb{R}^3$ avente tutte le componenti uguali e non nulle. Determinare il valore di k in modo che risulti $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = 3\, \mathbb{X}$.

9) Verificare se la proposizione $P : [\mathbb{A}\, o\, (\mathbb{B}\, e\, non\, \mathbb{C})] \Rightarrow [\mathbb{A}\, e\, non\, (\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})]$, dove $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono tre proposizioni qualunque, risulta una tautologia.

10) Data la funzione $f(x) = e^{k\,x - x^2}$, determinare se esistono valori del parametro k per i quali la funzione ha un punto di flesso in $x = 0$.