Compito di Matematica Generale del 22/9/2022 — CMG1

1) $f(x) = x^2 \cdot e^{1-x}$. C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$. $f(x) \geq 0 \ \forall x$, $f(0) = 0$.

$f'(x) = 2xe^{1-x} - x^2e^{1-x} = (2x - x^2)e^{1-x} \geq 0$

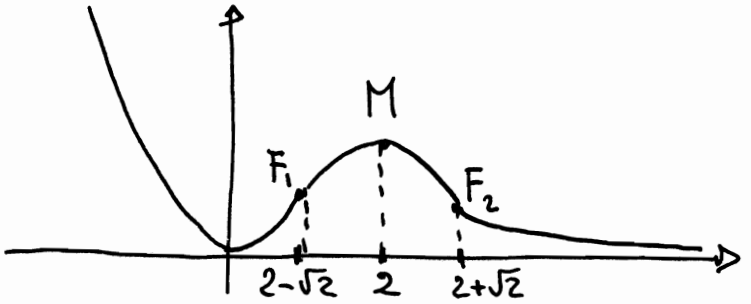
$x(2-x) \geq 0$ per $0 \leq x \leq 2$

$f''(x) = (2-2x)e^{1-x} - (2x-x^2)e^{1-x} =$

$= (x^2 - 4x + 2)e^{1-x} \geq 0 : x = 2 \pm \sqrt{4-2}$

$f''(x) \geq 0$ per $x \leq 2-\sqrt{2} \cup x \geq 2+\sqrt{2}$

Grafico:



2) $\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^2 - \sqrt{1+x}}{x} = \lim_{x\to0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} - \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1}{x} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ $\left(\lim_{x\to0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha\right)$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1 - x + 3^x - 2^x}{\sin x - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{-x} = 1$ $\left(3^x \to 0;\ 2^x \to 0;\ \sin x = o(x) \text{ per } x \to \infty\right)$.

3) $\lim_{x\to0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{kx^2} = \lim_{x\to0} \frac{e^{1-\cos x} - 1}{1-\cos x} \cdot \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{k} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k} = 2 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$.

4) Da $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{\log x - 1} = y \Rightarrow \log x - 1 = y^3 \Rightarrow \log x = y^3 + 1 \Rightarrow x = e^{y^3+1}$.

Quindi $F(x) = e^{x^3+1} = f(g(x)) = e^{2-g(x)} \Rightarrow 2 - g(x) = x^3 + 1 \Rightarrow g(x) = 1 - x^3$.

5) $\int_1^e \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\left(\log(x^2+2x+3)\Big|_1^2\right) = \frac{1}{2}(\log 11 - \log 6) =$

$= \frac{1}{2}\log\frac{11}{6} = \log\sqrt{\frac{11}{6}}$.

6) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(1) = 6 - 6 + 1 = 1$.

$f(1) = 2 - 3 - 1 = -2 \Rightarrow$ Eq. retta tg: $y + 2 = 1(x-1) \Rightarrow y = x - 3$ che non può intersecare la retta $y = x - 7$ perché è una sua parallela.

7) $f(x;y) = x^2 - x^2y + y^2$. $\nabla f(x;y) = (0;0) \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2xy = 0 \\ f'_y = 2y - x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

CMG2

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x(1-y)=0 \\ 2y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2=2 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=1 \end{cases}.$$

Tre punti stazionari: $(0;0)$; $(\sqrt{2};1)$; $(-\sqrt{2};1)$. $H(x;y)=\begin{Vmatrix} 2-2y & -2x \\ -2x & 2 \end{Vmatrix}$.

$H(0;0)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |H_1|=2>0 \\ |H_2|=4>0 \end{cases}$: Punto di Minimo.

$H(\sqrt{2};1)=\begin{Vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$: $|H_2|=-8<0$: P. Sella; $H(-\sqrt{2};1)=\begin{Vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$: $|H_2|=-8<0$: P. Sella.

8) $A\cdot X=3\cdot X \Rightarrow \begin{Vmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ x \\ x \end{Vmatrix} = 3\cdot \begin{Vmatrix} x \\ x \\ x \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x+kx \\ kx+x \\ x+kx \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3x \\ 3x \\ 3x \end{Vmatrix}$ vera se $k=2$.

9)

A	B	C	non C	B e non C	A ∨ (B e non C)	B ∨ C	non (B ∨ C)	A e non (B ∨ C)	* ⇒ *
1	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
								*	

La proposizione data non* è una tautologia.

10) Dato che la funzione è derivabile almeno due volte sarà $f''(0)=0$.

$f'(x)=(k-2x)\,e^{kx-x^2} \Rightarrow f''(x)=(-2)\cdot e^{kx-x^2}+(k-2x)^2\cdot e^{kx-x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=e^{kx-x^2}\cdot\left((k-2x)^2-2\right) \Rightarrow f''(0)=e^0\cdot\left(k^2-2\right)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow k^2-2=0 \Rightarrow k^2=2 \Rightarrow k=\pm\sqrt{2}$.