COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2021/22

Prova Intermedia 2021

I M 1) Calcolare un valore di z se $e^z = 3\sqrt{3} - 3\,i$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|\,y\,|}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & :(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & :(x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

I M 3) Data $f(x,y) = x^2 + y^2$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (1,\,-1)$, detti rispettivamente v e w i versori di $\mathbb{V}$ e di $\mathbb{W}$, se $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \sqrt{2}$ e $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = 2\sqrt{2}$, determinare le coordinate del punto (x_0,y_0) e calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,w} f(x_0,y_0)$.

I M 4) Con l'equazione $f(x,y,z) = 4xz - 3y^2 - x^3 + e^{z-x} - y^3 = 0$, soddisfatta nel punto $\mathrm{P} = (1,1,1)$, verificare, mediante il Teorema del Dini, l'esistenza di una funzione implicita $(x,y) \to z(x,y)$, della quale calcolare le derivate prime nonchè l'equazione del piano tangente alla superficie di tale funzione implicita nel punto considerato.

I M 5) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = x^3 w - y^3 z + xz^3 - yw^3 = 1 \\ g(x,y,z,w) = xy - zw + e^{x-z} - e^{w-y} = 0 \end{cases}$ soddisfatto nel punto $\mathrm{P} = (1,0,0,1)$, determinare una funzione implicita con esso definibile e di questa calcolare le derivate prime nel punto opportuno.

I Appello Sessione Invernale 2022

I M 1) Data l'equazione $x^3 - 4x^2 + 6x - 4 = 0$, determinare le radici cubiche della sua soluzione complessa situata nel quarto quadrante del piano.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^2}{x^3 + xy^2} & :(x,y) : x \neq 0 \\ 0 & :(x,y) : x = 0 \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = 2x^3 + y^3 - z^3 - 2xyz = 0$, ed il punto $P = (1,1,1)$ nel quale è soddisfatta, si verifichi che con essa è possibile definire una funzione implicita $z = z(x,y)$, della quale calcolare poi i differenziali totali primo e secondo, $\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}^2 z$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{x+y} - e^x - e^y$, determinare tutti i punti (x,y) nei quali risulti $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, dove v è il versore di $(1,\,-1)$. Tra tutti questi punti determinare quello in cui risulta $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = -1$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 - y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 \leq y \\ y^2 \leq x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Data una funzione derivabile $f(x)$, si definisce l'elasticità di tale funzione come: $\mathcal{E}(f) = \dfrac{x \cdot f'}{f}$. Determinare tutte le funzioni tali che $y = \mathcal{E}(y)$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = 3x - 6y + t \\ y' = -3y - t^2 \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x;\ x \le y \le 2; 4 \le x^2 + y^2\right\}$, calcolare:
$\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ mediante opportuna sostituzione in coordinate polari.

II Appello Sessione Invernale 2022

I M 1) Determinare le radici dell'equazione $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$.

I M 2) Verificare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \sqrt[3]{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = x\,e^y - y\,e^z - z\,e^w + w\,e^x = 0 \\ g(x,y,z,w) = xyz - yzw - xzw + xyw = 0 \end{cases}$ determinare se con esso si può definire una funzione implicita in un intorno del punto $\mathrm{P}_0 = (1, -1, 1, -1)$.
Se tale funzione esiste se ne calcolino le derivate prime.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2 y^2$, sia v il versore di $(1,1)$. Determinare i punti P_0 nei quali $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = 0$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0) = 2$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 \le 4 \end{cases}$.

II M 2) Analizzare la natura del punto stazionario della funzione $f(x,y) = e^{xy - x^2 - y^2}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\!:\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,x \le y \le \sqrt{3}\,x\right\}$, calcolare :
$\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ mediante opportuna sostituzione in coordinate polari.

I Appello Sessione Estiva 2022

I M 1) Se una delle tre radici cubiche di un numero z risulta $z_1 = 1 + i$, determinare modulo ed argomento delle altre due radici cubiche e determinare poi il numero z.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In caso di risposta affermativa, determinare poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y,z) = x\,e^y + y\,e^z - 2z\,e^x = 0$ soddisfatta nel punto $\mathrm{P}_0 = (0,0,0)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $(x,y) \to z$ e di questa calcolare $\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}^2 z$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^3 - y^3$, siano v e w i versori di $(1,1)$ e $(-1,1)$. Determinare i punti P_0 nei quali $\mathcal{D}^2_{v,w} f(\mathrm{P}_0) = 3$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \le y \le x + 1 \end{cases}$.

II M 2) Studiare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = 2x + 3y - e^x - y^3$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y \cdot y' = x \cdot (1 + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ (x-1)^2 + y^2 \le 1, 0 \le y\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Estiva 2022

I M 1) Se $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i$, calcolare le due radici quadrate del numero z^3.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt[3]{y}}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \ne (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ può, mediante un opportuno valore di k, essere resa continua $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$. In caso di risposta affermativa, determinare poi se essa risulti anche differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0$ soddisfatta nel punto $\mathrm{P}_0 = (1,1)$, verificare che con essa si può definire una funzione implicita $x \to y(x)$ e di questa calcolare la derivata prima e la derivata seconda nel punto opportuno.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = (x-y)\, e^{x-y}$ ed il versore $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, determinare i valori di α per i quali $\mathcal{D}_v f(1,1) = 0$ e per questi valori calcolare poi $\mathcal{D}^2_{v,-v} f(1,1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 \le 0 \\ y \le x + 1 \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - x^2 y$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x - 3y + e^{2t} \\ y' = 1 - x - y \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ x^2 + (y-1)^2 \le 1, 0 \le x\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$.

II Appello Sessione Autunnale 2022

I M 1) Dato $z = 1 + i$, sia w l'unica radice cubica di z situata nel secondo quadrante del piano complesso. Calcolare e^w.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, verificare che essa risulta continua in $(0,0)$ e determinare poi se in tale punto essa risulti anche differenziabile.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x = 0$, verificata nel punto $\mathrm{P}_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, definisce una funzione implicita $y = y(x)$. Calcolare derivata prima e seconda di tale funzione.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, si verifichi che $\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0)$ è costante, qualunque sia P_0 e qualunque sia $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } x^2 - 2 \le y \le x \end{cases}$.

II M 2) Determinare se la funzione $f(x,y,z) = x^2 - x^2\,y + y^2 + z^2$ ammette punti di massimo e/o di minimo relativo.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = y + t \\ y' = x - t^2 \end{cases}$.

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\ 0 \le x; 0 \le y \le 1 - x\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$\boxed{\text{Appello Sessione Straordinaria II 2022}}$

I M 1) Sapendo che $e^z = 1 - \sqrt{3}\,i$, calcolare z.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = x \cdot |\cos y|$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = x\,e^y - y\,e^z - z\,e^w + w\,e^x = 0 \\ g(x,y,z,w) = xyz - yzw - xzw + xyw = 0 \end{cases}$, soddisfatto nel punto $\mathrm{P}_0 = (1,\,-1,1,\,-1)$, determinare se e quale tipo di funzione implicita si può determinare nell'intorno di un punto opportuno.

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (1,\,-1)$, detti rispettivamente v e w i versori di $\mathbb{V}$ e di $\mathbb{W}$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = 1$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = -2$, determinare le coordinate del punto (x_0,y_0).

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

II M 2) Data la funzione $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - y$, si operi una trasformazione in coordinate polari (ρ,ϑ) con centro il punto $(0,0)$, ottenendo una funzione composta $\mathrm{F}\colon (\rho,\vartheta) \to z$. Si esprimano le derivate parziali $\dfrac{\partial z}{\partial \rho}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial \vartheta}$ come prodotto delle opportune matrici Jacobiane.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} e^{x-y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3x\}$.