COMPITO di ANALISI MATEMATICA 22/9/2022

I M 1) Dato $z = 1 + i$, sia w l'unica radice cubica di z situata nel secondo quadrante del piano complesso. Calcolare e^w.

Essendo $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ sarà allora:

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ 0 \le k \le 2\,.$

Per $k = 0$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}\right)$: cade nel primo quadrante;

Per $k = 1$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$: cade nel secondo quadrante;

Per $k = 2$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\operatorname{sen}\frac{17\pi}{12}\right)$: cade nel terzo quadrante.

Dato che $\sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ sarà allora :

$$e^w = e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{1}{e^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}}\left(\cos\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + i\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, verificare che essa risulta continua in $(0,0)$ e determinare poi se in tale punto essa risulti anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3 \cos^2\vartheta \operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^2} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0$; la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta\right| \le 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0\cdot h}{0+h^2} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim\limits_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^3\cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta}{\varrho^3} = \cos^2\vartheta\operatorname{sen}\vartheta = 0$ solo per particolari valori di ϑ; quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = x\operatorname{sen}y - y\operatorname{sen}x = 0$, verificata nel punto $\mathrm{P}_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, definisce una funzione implicita $y = y(x)$. Calcolare derivata prima e seconda di tale funzione.

La funzione $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x$ è differenziabile due volte $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Avremo poi: $\nabla f(x,y) = (\operatorname{sen} y - y\cos x; x\cos y - \operatorname{sen} x)$ e quindi $\nabla f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = (1, -1)$.
Essendo $f'_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq 0$ è possibile definire una funzione implicita $y = y(x)$.
Sarà quindi, nel punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$:
$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{f'_x\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}{f'_y\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)} = -\frac{1}{-1} = 1$. Avremo poi:

$$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} y\operatorname{sen} x & \cos y - \cos x \\ \cos y - \cos x & -x\operatorname{sen} y \end{Vmatrix} \Rightarrow \mathbb{H}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{Vmatrix} \frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi}{2} \end{Vmatrix}.$$

Sappiamo che $y'' = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ e quindi:

$$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot 1 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)(1)^2}{-1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$, si verifichi che $\mathcal{D}^2_{v,v} f(\mathrm{P}_0)$ è costante, qualunque sia P_0 e qualunque sia $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$.

La funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ è ovunque differenziabile due volte, per cui sarà:
$\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot v$ e $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0,y_0) = v \cdot \mathbb{H}(x_0,y_0)\cdot v^T$.
Essendo: $\nabla f(x,y) = (2x; 2y)$ avremo anche:
$\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(x_0,y_0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ e quindi:

$$\mathcal{D}^2_{v,v} f(x_0,y_0) = \Vert \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \Vert \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} = \Vert \cos\alpha \quad \operatorname{sen}\alpha \Vert \cdot \begin{Vmatrix} 2\cos\alpha \\ 2\operatorname{sen}\alpha \end{Vmatrix} =$$
$$= 2\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2,\ \forall\,(x_0,y_0), \forall\ \alpha.$$

II M 1) Risolvere il problema: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } x^2 - 2 \le y \le x \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma: $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - y - 2 \le 0 \\ y - x \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_1\left(x^2 - y - 2\right) - \lambda_2(y - x)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 2y = 0 \\ x^2 - 2 \le y \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -2 \le 0 \\ 0 \le 0 \end{cases}$$. Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\|$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| > 0 \\ |\mathbb{H}_2| > 0 \end{cases}$ segue che $(0,0)$ è un punto di minimo.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x = 2x(1-\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 2 \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \\ \lambda_1 = 4 \\ -2 \le 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ y \le x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{3}{2}} : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{2} \\ \lambda_1 = 1 \\ -\frac{1}{2} \le -\sqrt{\frac{3}{2}} : \text{non vera} \end{cases} .$$

Il punto $P_1 : (0, -2)$, con $\lambda_1 = 4 > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo, il punto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ con $\lambda_1 = 1 > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo, il punto $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ non appartiene alla regione ammissibile $\mathcal{E}$.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ x^2 - 2 \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda_2}{2} \\ y = \frac{\lambda_2}{2} \\ y = x \\ x^2 - 2 \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda_2}{2} \\ y = -x \\ y = x \\ x^2 - 2 \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -2 \le 0 : \text{vera} \end{cases} .$$

Il punto $(0,0)$ è già stato esaminato ed è un punto di Minimo.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 2\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 - 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 8 \\ \lambda_2 = 4 + \lambda_1 \\ x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ \lambda_1 = \frac{8}{3} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{20}{3} > 0 \end{cases}$$

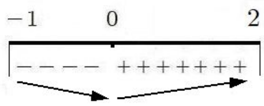
Dato che $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ il punto $(2,2)$ potrebbe essere punto di Massimo;

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = \lambda_1 - 2 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ \lambda_1 = \frac{4}{3} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{2}{3} < 0 \end{cases} .$$

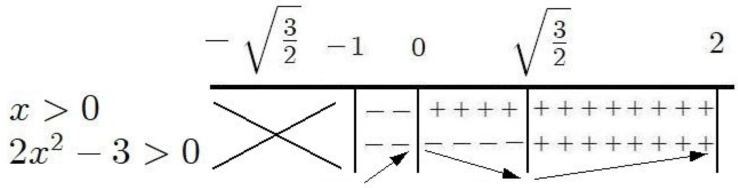
Dato che $\lambda_1 > 0$ mentre $\lambda_2 < 0$ il punto $(-1, -1)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

Studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.

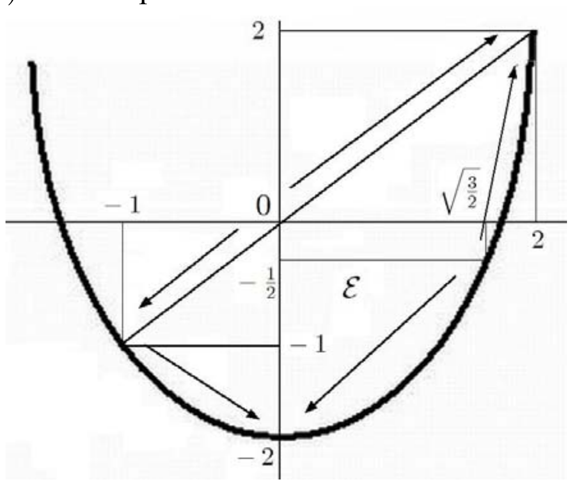
Se $y = x$ risulta $f(x,x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Quindi $f'(x) = 2x \geq 0$ per $x \geq 0$ per cui il punto $(0,0)$ con $f(0,0) = 0$ risulta un punto di Minimo coerentemente con quanto visto nel caso 1) e 3).



Se $y = x^2 - 2$, risulta $f\left(x, x^2 - 2\right) = x^4 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 6x = 2x\left(2x^2 - 3\right)$ con $2x^2 - 3 > 0$ per $x < -\sqrt{\frac{3}{2}}$ e per $x > \sqrt{\frac{3}{2}}$.



Quindi:
il punto $(-1, -1)$ come già visto non è nè punto di massimo nè punto di minimo;
il punto $(0, -2)$ con $f(0, -2) = 4$ risulta essere un punto di Massimo coerentemente con quanto visto al punto 2);
il punto $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ risulterebbe un punto di Minimo, in contrasto con quanto visto al punto 2) dove si ipotizzava che poteva essere un punto di Massimo e quindi non è nulla;
il punto $(2,2)$ con $f(2,2) = 8$ risulta essere punto di Massimo.
Il punto $(0,0)$ con $f(0,0) = 0$ è il punto di Minimo.



II M 2) Determinare se la funzione $f(x,y,z) = x^2 - x^2 y + y^2 + z^2$ ammette punti di massimo e/o di minimo relativo.

La funzione è una funzione differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x,y,z) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2xy = 2x\,(1-y) = 0 \\ f'_y = 2y - x^2 = 0 \\ f'_z = 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} .$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari: $P_0 : (0,0,0)$, $P_1 : \left(\sqrt{2}, 1, 0\right)$, $P_2 : \left(-\sqrt{2}, 1, 0\right)$.

Da $\mathbb{H}(x,y,z)=\begin{Vmatrix} 2-2y & -2x & 0 \\ -2x & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(0,0,0)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1|=2>0 \\ |\mathbb{H}_2|=4>0 \\ |\mathbb{H}_3|=8>0 \end{cases}$ segue che $(0,0,0)$ è un punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(\sqrt{2},1,0\right)=\begin{Vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 0 \\ -2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; da $|\mathbb{H}_2|=-8<0$ segue che $\left(\sqrt{2},1,0\right)$ è un punto di sella;

$\mathbb{H}\left(-\sqrt{2},1,0\right)=\begin{Vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Vmatrix}$; da $|\mathbb{H}_2|=-8<0$ segue che $\left(-\sqrt{2},1,0\right)$ è un punto di sella.

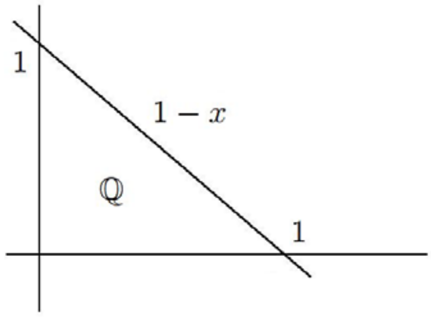
II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x'=y+t \\ y'=x-t^2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x'=y+t \\ y'=x-t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'-y=t \\ -x+y'=-t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t \\ -t^2 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ -t^2 & D \end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2-1\right)(x)=1-t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x''-x=1-t^2\,.$$

Da $x''-x=0$ otteniamo $\lambda^2-1=0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=-1$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t)=c_1e^t+c_2\,e^{-t}$.
Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, possiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo : $x_0=at^2+bt+c$.
Sarà quindi $x_0'=2at+b$ e $x_0''=2a$ da cui sostituendo:
$2a-at^2-bt-c=-at^2-bt+2a-c=1-t^2$ da cui:
$\begin{cases} -a=-1 \\ -b=0 \\ 2a-c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=1 \end{cases}$ e quindi la soluzione generale della non omogenea per $x(t)$ sarà:
$x(t)=c_1e^t+c_2\,e^{-t}+t^2+1$.
Dalla $x'=y+t$ otteniamo $y(t)=x'-t$ e quindi:
$y(t)=c_1e^t-c_2\,e^{-t}+2t-t=c_1e^t-c_2\,e^{-t}+t$.
e quindi la soluzione generale:
$$\begin{cases} x(t)=c_1e^t+c_2\,e^{-t}+t^2+1 \\ y(t)=c_1e^t-c_2\,e^{-t}+t \end{cases}.$$

II M 4) Data $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0\le x; 0\le y\le 1-x\right\}$, calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:
$\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0\le x; 0\le y\le 1-x\right\}$



avremo:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{1-x} e^{x+y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^{x+y}\right|_0^{1-x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 e^{x+1-x} - e^{x+0}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e - e^x\,\mathrm{d}x = \left(ex - e^x\right|_0^1 =$$

$$= (e-e) - (0-1) = 1\,.$$