COMPITO di ANALISI MATEMATICA 6/10/2022

I M 1) Sapendo che $e^z = 1 - i\sqrt{3}$, calcolare z.

Essendo $e^z = 2\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$ sarà allora:

$e^z = e^{x+iy} = e^x\, e^{iy} = e^x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\, y) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right)$ da cui:

$e^x = 2 \Rightarrow x = \log 2$ e $y = \frac{5\pi}{3}$ per cui $z = \log 2 + i\,\frac{5\pi}{3}$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = x \cdot |\cos y|$ è differenziabile nel punto $(0,0)$.

Banalmente $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot |\cos y| = 0$. Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot|\cos 0| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot|\cos h| - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot|\cos y| - 0 - (1,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot(|\cos y| - 1)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho\cos\vartheta\,\cdot(|\cos(\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| - 1)}{\varrho} = \lim_{\varrho\to 0}\cos\vartheta\,\left(|\cos(\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta)| - 1\right) = \cos\vartheta\,(1-1) = 0$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z,w) = x\,e^y - y\,e^z - z\,e^w + w\,e^x = 0 \\ g(x,y,z,w) = xyz - yzw - xzw + xyw = 0 \end{cases}$, soddisfatto nel punto $\mathrm{P}_0 = (1,-1,1,-1)$, determinare se e quale tipo di funzione implicita si può determinare nell'intorno di un punto opportuno.

Le funzioni $f(x,y,z,w)$ e $g(x,y,z,w)$ sono differenziabili $\forall\,(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4$. Poi $\begin{cases} f(1,-1,1,-1) = \frac{1}{e} + e - \frac{1}{e} - e = 0 \\ g(1,-1,1,-1) = -1 - 1 + 1 + 1 = 0 \end{cases}$. Costruiamo la matrice Jacobiana:

$$\mathbb{J}\frac{(f,g)}{(x,y,z,w)} = \left\|\begin{matrix} e^y + we^x & xe^y - e^z & -ye^z - e^w & -ze^w + e^x \\ yz - zw + yw & xz - zw + xw & xy - yw - xw & -yz - xz + xy \end{matrix}\right\|$$

e quindi:

$$\mathbb{J}\frac{(f,g)}{(x,y,z,w)}(1,-1,1,-1) = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{e} - e & \frac{1}{e} - e & e - \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ -1+1+1 & 1+1-1 & -1-1+1 & 1-1-1 \end{matrix}\right\| =$$

$$\mathbb{J}\frac{(f,g)}{(x,y,z,w)}(1,-1,1,-1) = \left\|\begin{matrix} \frac{1}{e} - e & \frac{1}{e} - e & e - \frac{1}{e} & e - \frac{1}{e} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\|.$$

Non esistono minori di ordine 2 non nulli e quindi non è soddisfatta la condizione sufficiente del Teorema del Dini atta a garantire l'esistenza di una funzione implicita da $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

I M 4) Data $f(x,y) = x\,y$ ed i vettori $\mathbb{V} = (1,1)$ e $\mathbb{W} = (1,\,-1)$, detti rispettivamente v e w i versori di $\mathbb{V}$ e di $\mathbb{W}$, sapendo che $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = 1$ e che $\mathcal{D}_w f(x_0,y_0) = -2$, determinare le coordinate del punto (x_0,y_0).

La funzione $f(x,y) = x\,y$ è ovunque differenziabile, per cui sarà:
$\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot v$.
Essendo $\nabla f(x,y) = (y;x)$, $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ avremo:

$$\begin{cases} (y;x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 \\ (y;x)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + x = \sqrt{2} \\ y - x = -2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = \frac{3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

e quindi $(x_0,y_0) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione limitata e chiusa (ellisse), e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(4x^2 + y^2 - 4\right)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 8\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ 4\frac{1}{64\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \frac{5}{16\lambda^2} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{8\lambda} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{5}{64} \end{cases} \text{ e quindi:}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \lambda = \frac{\sqrt{5}}{8} \end{cases} \text{ e } \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{8} \end{cases}$$

. Per applicare le condizioni del secondo ordine usiamo la matrice Hessiana orlata: $\overline{\mathbb{H}}(x,y,\lambda) = \left\|\begin{matrix} 0 & 8x & 2y \\ 8x & -8\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{matrix}\right\|$.

$$\text{Essendo } \left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & -\sqrt{5} & 0 \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{4} \\ \frac{8}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right| = \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\begin{vmatrix}\frac{8}{\sqrt{5}} & \frac{8}{\sqrt{5}}\\ -\sqrt{5} & \frac{\sqrt{5}}{4}\end{vmatrix} = \frac{8}{\sqrt{5}}\cdot(2+8) = \frac{80}{\sqrt{5}} > 0$$

per cui il punto $\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ è il punto di massimo con $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$; essendo:

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right| = \begin{vmatrix}0 & -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}}\\ -\frac{8}{\sqrt{5}} & \sqrt{5} & 0\\ -\frac{8}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{4}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}}{4}\\ -\frac{8}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{4}\end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\left|\overline{\mathbb{H}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{\sqrt{5}}{8}\right)\right| = -\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot\begin{vmatrix}-\frac{8}{\sqrt{5}} & -\frac{8}{\sqrt{5}}\\ \sqrt{5} & -\frac{\sqrt{5}}{4}\end{vmatrix} = -\frac{8}{\sqrt{5}}\cdot(2+8) = -\frac{80}{\sqrt{5}} < 0$$

per cui il punto $\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ è il punto di minimo con $f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$.

II M 2) Data la funzione $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - y$, si operi una trasformazione in coordinate polari (ρ,ϑ) con centro il punto $(0,0)$, ottenendo una funzione composta F: $(\rho,\vartheta) \to z$. Si esprimano le derivate parziali $\frac{\partial z}{\partial\rho}$ e $\frac{\partial z}{\partial\vartheta}$ come prodotto delle opportune matrici Jacobiane.

La trasformazione in coordinate polari è data da $\begin{cases} x = \varrho\cos\vartheta \\ y = \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\end{cases}$, abbiamo poi una composizione del tipo $(\rho,\vartheta) \to (x,y) \to z$ per cui:

$$\mathbb{J}\frac{(z)}{(\rho,\vartheta)} = \mathbb{J}\frac{(z)}{(x,y)}\cdot\mathbb{J}\frac{(x,y)}{(\rho,\vartheta)} = \|\, 2x \quad 2y-1\,\|\cdot\left\|\begin{matrix}\cos\vartheta & -\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \varrho\cos\vartheta\end{matrix}\right\| =$$

$$\mathbb{J}\frac{(z)}{(\rho,\vartheta)} = \|\, 2\varrho\cos\vartheta \quad 2\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta - 1\,\|\cdot\left\|\begin{matrix}\cos\vartheta & -\varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta\\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \varrho\cos\vartheta\end{matrix}\right\| =$$

$$\mathbb{J}\frac{(z)}{(\rho,\vartheta)} = \|\, 2\varrho\cos^2\vartheta + 2\varrho\,\mathrm{sen}^2\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta \quad -2\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 2\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \varrho\cos\vartheta\,\|$$

$$\mathbb{J}\frac{(z)}{(\rho,\vartheta)} = \|\, 2\varrho - \mathrm{sen}\,\vartheta \quad -\varrho\cos\vartheta\,\|.$$

Infatti, da $z = f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ segue $z = \mathrm{F}(\rho,\vartheta) = \varrho^2\cos^2\vartheta + \varrho^2\,\mathrm{sen}^2\vartheta - \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$ e quindi :

$$\frac{\partial z}{\partial\rho} = 2\varrho\cos^2\vartheta + 2\varrho\,\mathrm{sen}^2\vartheta - \mathrm{sen}\,\vartheta = 2\varrho - \mathrm{sen}\,\vartheta$$

$$\frac{\partial z}{\partial\vartheta} = -2\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta + 2\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta - \varrho\cos\vartheta = -\varrho\cos\vartheta.$$

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y\end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = x + y + 1 \\ y' = -3x + 5y\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - y = 1 \\ 3x + y' - 5y = 0\end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix}D-1 & -1\\ 3 & D-5\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}1\\ 0\end{matrix}\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix}D-1 & -1\\ 3 & D-5\end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & D-5\end{vmatrix} \Rightarrow \left(D^2 - 6D + 8\right)(x) = -5 \Rightarrow$$

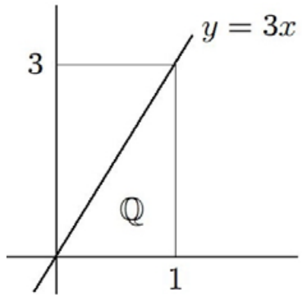
$$\Rightarrow x'' - 6x' + 8x = -5.$$

Da $x'' - 6x' + 8x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 4)(\lambda - 2) = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà: $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2\, e^{2t}$.
Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, possiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo : $x_0 = k$.
Sarà quindi $x_0' = x_0'' = 0$ da cui sostituendo:
$8k = -5$ da cui $k = -\frac{5}{8}$:
e quindi la soluzione generale della non omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t) = c_1 e^{4t} + c_2\, e^{2t} - \frac{5}{8}$.
Dalla $x' = x + y + 1$ otteniamo $y(t) = x' - x - 1$ e quindi:
$y(t) = 4c_1 e^{4t} + 2c_2\, e^{2t} - c_1 e^{4t} - c_2\, e^{2t} + \frac{5}{8} - 1 = 3c_1 e^{4t} + c_2\, e^{2t} - \frac{3}{8}$.
e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{4t} + c_2\, e^{2t} - \frac{5}{8} \\ y(t) = 3c_1 e^{4t} + c_2\, e^{2t} - \frac{3}{8} \end{cases} .$$

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} e^{x-y} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3x\right\}$.

Vista la regione di integrazione:
$\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 3x\right\}$



avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} e^{x-y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{3x} e^{x-y}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(-e^{x-y}\right|_0^{3x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 -e^{x-3x} + e^{x-0}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 -e^{-2x} + e^x\, \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2} e^{-2x} + e^x \right|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} e^{-2} + e\right) - \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2e^2} + e - \frac{3}{2} .$$