UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di

METODI QUANTITATIVI PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE E FINANZIARIE

MATEMATICA PER LE APPLICAZIONI ECONOMICHE E FINANZIARIE

Volume 1

Numeri complessi – Algebra Lineare

AA. 2022/23

NUMERI COMPLESSI

I numeri complessi nascono storicamente dall'esigenza di dare una soluzione a problemi privi di essa in ambito reale. Si inizia con la seguente:
Definizione 1 : Dicesi **unità immaginaria**, denotata con la lettera i, quel numero (non reale) tale che $i^2 = -1$.
Si può arrivare a tale definizione supponendo che vi possano essere numeri per i quali opposto e reciproco coincidono: $-x = \frac{1}{x}$, da cui otteniamo $x^2 = -1$, che, algebricamente risolta, ci fornisce $x = \pm\sqrt{-1}$. Avendo posto, per definizione, $i^2 = -1$, sia i che $-i$ sono le soluzioni di tale equazione, e quindi risulta $\frac{1}{i} = -i$.
Per quanto riguarda le potenze dell'unità immaginaria i avremo:
$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = -1; i^3 = i \cdot i^2 = -i; i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 = i^0$,
ovvero queste si ripetono con periodicità pari a 4. Ciò ne consente un calcolo molto rapido.
Esempio 1 : $i^{725} = i^{181\cdot 4+1} = \left(i^4\right)^{181} \cdot i^1 = 1^{181} \cdot i = i$.
$i^{-321} = i^{-(80\cdot 4)-1} = \left(i^4\right)^{-80} \cdot i^{-1} = 1^{-80} \cdot \frac{1}{i} = -i$.

Definizione 2 : I numeri del tipo $k\,i$, con $k \in \mathbb{R}$, vengono detti **numeri immaginari** (puri).
Dai numeri immaginari si passa a definire i numeri complessi:
Definizione 3 : Dicesi **numero complesso** un numero della forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, ovvero la somma di un numero reale con un numero immaginario.
Il numero a si dice la **parte reale** del numero complesso $a + bi$, mentre bi è detta la **parte immaginaria**, e b è detto il **coefficiente dell'immaginario**.
Il numero $a + bi$ è detto numero complesso in **forma algebrica**.
Indicato con $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, risulta $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$; infatti i numeri reali sono un sottoinsieme dei numeri complessi, potendosi porre: $a = a + 0i, \forall\, a \in \mathbb{R}$.
Consideriamo ora la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. E' facile vedere come esista una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{C}$ ed $\mathbb{R}^2$: ad ogni coppia (a, b) corrisponde uno ed un solo numero complesso in forma algebrica $a + bi$, e viceversa. Esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra i numeri complessi ed i punti del piano $\mathbb{R}^2$; la parte reale a ha il ruolo dell'ascissa, il coefficiente dell'immaginario b ha il ruolo dell'ordinata.
Un piano cartesiano, ad ogni punto (a, b) del quale viene fatto corrispondere il numero complesso $a + bi$, prende il nome di **piano complesso**. L'asse delle ascisse prende il nome di asse reale, dato che ad esso corrispondono i numeri $a + 0i$, ovvero i numeri che sono reali, mentre quello delle ordinate prende il nome di asse immaginario, dato che ad esso corrispondono i numeri $0 + bi$, ovvero i numeri che sono immaginari. Il numero reale 0 corrisponde alla coppia $(0, 0)$, il numero reale 1 alla coppia $(1, 0)$, l'unità immaginaria i alla coppia $(0, 1)$.

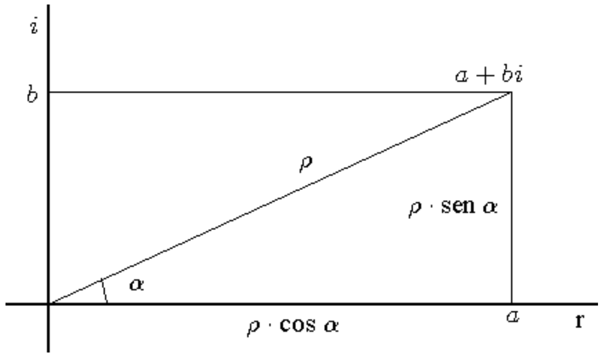
OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

Definizione 4 : Dati due numeri complessi espressi in forma algebrica $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$, si definiscono la loro **somma** e la loro **differenza** come:
$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$;
$z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Ovvero la somma (differenza) di due numeri complessi è un numero complesso avente per parte reale la somma (differenza) delle parti reali e per parte immaginaria la somma (differenza) delle parti immaginarie.
Usando invece la notazione a coppie, se $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, definiamo:
$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$ quale somma, e
$(a_1, b_1) - (a_2, b_2) = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$ quale differenza dei due numeri complessi.
Si noti l'analogia con la somma e la differenza di vettori in $\mathbb{R}^2$.
Passiamo al **prodotto** di due numeri complessi in forma algebrica. Eseguendo il prodotto mediante le regole del calcolo letterale, e ricordando che $i^2 = -1$, avremo:
$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 =$
$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$.
Con la notazione a coppie scriveremo invece:
$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1)$.
E' facile vedere come gli **elementi neutri** rispetto alla somma ed al prodotto siano ancora 0 e 1, ovvero le coppie $(0,0)$ e $(1,0)$.
Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z = a + bi$. Per fare questo introduciamo il concetto di coniugato:
Definizione 5 : Dato il numero complesso $a + bi$ si dice suo **coniugato** il numero complesso $a - bi$, ovvero il numero avente la stessa parte reale e l'opposto per coefficiente dell'immaginario.
Il coniugato di z si indica con $\overline{z}$, ed avremo quindi $\overline{z} = a - bi$.
Per calcolare il **reciproco** di z moltiplichiamo e dividiamo per il suo coniugato $\overline{z}$, ed avremo:
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2 - (bi)^2} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i .$$
Nella notazione a coppie avremo: $\dfrac{1}{(a,b)} = (a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}; -\dfrac{b}{a^2+b^2} \right)$.
Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha quindi un unico reciproco. Ricordiamo che $\dfrac{1}{i} = -i$.
Passiamo infine al **quoziente** $\dfrac{z_1}{z_2}$, vedendolo come il prodotto $z_1 \cdot \dfrac{1}{z_2}$, ed avremo:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + a_2 b_1 i - a_1 b_2 i - b_1 b_2 i^2}{a_2^2 + b_2^2} =$$
$= \dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$. Mediante la notazione a coppie scriveremo:
$$\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right).$$

Esempio 2 : $(3 + 2i) - (5 - i) = -2 + 3i$.
$(3 + 2i) \cdot (5 - i) = 15 - 3i + 10i - 2i^2 = 17 + 7i$.
$$\frac{3+2i}{5-i} = \frac{3+2i}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{15 + 3i + 10i - 2}{25+1} = \frac{13+13i}{26} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i .$$

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI
Dato un numero complesso $z = a + bi \neq 0$, come illustrato in figura, valgono le seguenti uguaglianze: $\begin{cases} a = \rho \cos \alpha \\ b = \rho \operatorname{sen} \alpha \end{cases}$, dove $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ viene detto **modulo** del numero complesso $z = a + bi$ mentre α, l'angolo formato dal segmento che unisce i punti $(0,0)$ e (a,b) con il semiasse reale positivo, è detto **argomento** del numero complesso $z = a + bi$.



Avremo allora, sostituendo:
$z = a + bi = \rho \cos \alpha + i\, \rho \operatorname{sen} \alpha = \rho \left(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha\right)$,
che viene detta **forma trigonometrica** del numero complesso.
Notiamo che $|\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha} = 1$.
Si ha poi $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\rho \operatorname{sen} \alpha}{\rho \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$, da cui otteniamo, $\alpha = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$.

Notiamo come la rappresentazione in forma trigonometrica di un numero complesso non sia unica; infatti, se $k \in \mathbb{Z}$, si ha $\rho \left(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha\right) = \rho \left(\cos \left(\alpha + 2k\pi\right) + i \operatorname{sen} \left(\alpha + 2k\pi\right)\right)$, per la periodicità, a meno di giri interi, delle funzioni seno e coseno.

Esempio 3 : Essendo $|i| = \sqrt{0+1} = 1$, otteniamo : $i = 1 \cdot \left(\cos \dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2}\right)$.
Essendo $|-1| = 1$, otteniamo $-1 = 1 \cdot \left(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi\right)$.
Essendo $|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, otteniamo : $-1 + i = \sqrt{2} \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} i\right) =$
$= \sqrt{2} \left(\cos \dfrac{3}{4}\pi + i \operatorname{sen} \dfrac{3}{4}\pi\right)$, quindi per $z = -1 + i$, risulta $\rho = \sqrt{2}$ e $\alpha = \dfrac{3}{4}\pi$.
Essendo $\left|2\sqrt{3} + 2i\right| = \sqrt{12+4} = 4$, otteniamo : $2\sqrt{3} + 2i = 4 \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} i\right) =$
$= 4 \left(\cos \dfrac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{6}\right)$, quindi per $z = 2\sqrt{3} + 2i$, risulta $\rho = 4$ e $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

OPERAZIONI SUI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA
La forma trigonometrica dei numeri complessi non è di particolare utilità per calcolare somma e differenza di numeri complessi, operazioni per le quali è più utile operare in forma algebrica. Diversa è la situazione per quanto riguarda il prodotto, il reciproco, il quoziente, l'elevamento a potenza e l'estrazione di radice.
Siano allora dati due numeri complessi in forma trigonometrica:
$z_1 = \rho_1 \left(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha\right)$ e $z_2 = \rho_2 \left(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta\right)$.
Eseguendo il prodotto avremo:
$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\, \rho_2 \left(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha\right) \left(\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta\right) =$
$= \rho_1\, \rho_2 \left(\cos \alpha \cos \beta + i \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + i \cos \alpha \operatorname{sen} \beta + i^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta\right) =$
$= \rho_1\, \rho_2 \left(\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta + i \left(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta\right)\right) =$
$= \rho_1\, \rho_2 \left(\cos \left(\alpha + \beta\right) + i \operatorname{sen} \left(\alpha + \beta\right)\right)$. Ovvero:
Teorema 1 : Il prodotto di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti.
Si estende facilmente la regola al prodotto di quanti si vogliano numeri complessi.
Passiamo ora al calcolo del reciproco di un numero complesso $z \neq 0$; avremo:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)} = \frac{1}{\rho}\,\frac{(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\,(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)} =$$
$$= \frac{1}{\rho}\,\frac{(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha)}{(\cos^2\alpha + \mathrm{sen}^2\,\alpha)} = \frac{1}{\rho}\,(\cos\alpha - i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = \frac{1}{\rho}\,(\cos(\,-\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(\,-\alpha))\,.$$ Ovvero:

Teorema 2 : Il reciproco di un numero complesso in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il reciproco del modulo e per argomento l'opposto dell'argomento.
Calcoliamo infine il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica, come prodotto del primo per il reciproco del secondo. Avremo:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\cdot\frac{1}{z_2} = \rho_1\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)\cdot\frac{1}{\rho_2}\,(\cos(\,-\beta) + i\,\mathrm{sen}\,(\,-\beta)) =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\,(\cos(\alpha-\beta) + i\,\mathrm{sen}\,(\alpha-\beta))\,.$$ Ovvero:

Teorema 3 : Il quoziente di due numeri complessi in forma trigonometrica è un numero complesso che ha per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza degli argomenti.
Le formule fin qui ottenute prendono il nome di **formule di De Moivre**.

Esempio 4 : Sapendo che $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}\right)$, $2\sqrt{3}+2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, e $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$, otteniamo:

$$\frac{i}{2\sqrt{3}+2i} = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\,i\,.$$

$$\frac{1}{-1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,i\right) =$$
$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,i\,.$$

POTENZE DI NUMERI COMPLESSI IN FORMA TRIGONOMETRICA

Utilizzando quanto visto per il prodotto, calcoliamo la potenza ad esponente naturale di un numero complesso. Se $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ e se $n\in\mathbb{N}$, avremo :
$z^n = [\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)]^n = \rho^n\cdot(\cos n\alpha + i\,\mathrm{sen}\,n\alpha)$, dato che il modulo sarà il prodotto di n moduli tutti uguali a ρ, mentre l'argomento è la somma di n argomenti tutti uguali ad α.
Ovvero:

Teorema 4 : La **potenza ad esponente naturale** di un numero complesso in forma trigonometrica ha per modulo la potenza n-esima del modulo e per argomento il multiplo secondo n dell'argomento.

Esempio 5 : Essendo $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3}{4}\pi\right)$, sarà

$$(\,-1+i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{3}{4}\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(8\cdot\frac{3}{4}\pi\right)\right) = 16\,(\cos 6\pi + i\,\mathrm{sen}\,6\pi) = 16\,.$$

Passiamo alle potenze ad esponente intero $m\in\mathbb{Z}$. Dato che $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$, basta definire le potenze ad esponente $m\in\mathbb{Z}_-$. Per far questo poniamo $m = -n,\, n\in\mathbb{N}$.
Essendo $z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n$, basterà applicare la regola trovata per gli esponenti naturali al numero z^{-1}, il reciproco di z. Avremo quindi, se $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$:

$$z^m = z^{-n} = \left(z^{-1}\right)^n = \left[(\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha))^{-1}\right]^n = \left[\frac{1}{\rho}\,(\cos(-\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(-\alpha))\right]^n =$$
$$= \frac{1}{\rho^n}\,(\cos(-n\,\alpha) + i\,\mathrm{sen}\,(-n\,\alpha)) = \rho^m\,(\cos m\,\alpha + i\,\mathrm{sen}\,m\,\alpha)\,.$$

Quindi la **potenza ad esponente intero** m, positivo o negativo che sia, si definisce nello stesso modo delle potenze ad esponente naturale: ha per modulo la potenza m-esima del modulo e per argomento il multiplo secondo m dell'argomento.
Si noti come il risultato trovato per il reciproco coincida, ovviamente, con quello che si trova applicando l'elevamento a potenza -1.

Esempio 6 : Essendo $2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)$, sarà anche:

$$\left(2\sqrt{3} + 2i\right)^{-12} = 4^{-12}\left(\cos\left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-12\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{4^{12}}\,(\cos(-2\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(-2\pi)) = \frac{1}{4^{12}}\,(1 + i\cdot 0) = \frac{1}{4^{12}}\,.$$

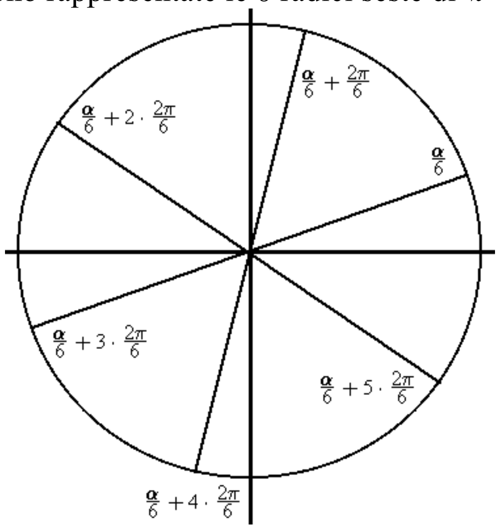
Passiamo alle potenze ad esponente razionale, iniziando dagli esponenti del tipo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, ovvero studiamo il problema dell'estrazione della **radice n-esima** di un numero complesso.
Vogliamo definire $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$, con $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.
Posto $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = w$, con w incognito, sia $w = x\,(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y)$, con x e y incogniti.
Essendo $z = w^n$, sostituendo otteniamo: $\rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha) = x^n\,(\cos ny + i\,\mathrm{sen}\,ny)$.
Quest'ultima uguaglianza risulta soddisfatta se:

$$\begin{cases} \rho = x^n \\ \alpha + 2k\pi = ny \end{cases}, \text{ ovvero se } \begin{cases} x = \sqrt[n]{\rho} \\ y = \dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\,,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

La prima uguaglianza ha una sola soluzione, la radice n-esima positiva di ρ, mentre la seconda uguaglianza esprime la possibilità che gli argomenti dei due numeri complessi z e w^n diano luogo allo stesso punto del piano complesso pur differendo per multipli interi di un giro.
Il valore $\frac{\alpha}{n}$ rappresenta l'n-esima parte dell'argomento α del radicando z mentre $\frac{2\pi}{n}$ rappresenta un n-esimo di un giro intero.
Per $k = 0$ otteniamo $y = \frac{\alpha}{n}$, per $k = 1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}$ e così via; per $k = n-1$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + (n-1)\,\frac{2\pi}{n}$, ed infine, per $k = n$ si ha $y = \frac{\alpha}{n} + n\cdot\frac{2\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + 2\pi$, che nel piano complesso ci rappresenta lo stesso punto dato da $y = \frac{\alpha}{n}$. Avendo diviso l'angolo giro in n parti uguali, partendo dalla posizione data da $y = \frac{\alpha}{n}$, dopo aver aggiunto n di queste parti ci ritroviamo nella posizione di partenza. Se diamo allora a k i valori $n+1$, $n+2$ eccetera ritroveremo gli stessi punti trovati in precedenza, e quindi le stesse radici n-esime.
Quindi vale il seguente
Teorema 5 : Le radici n-esime del numero complesso z sono in numero di n e sono date dalla formula generale:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right),\ 0 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N}\,.$$

Ogni numero complesso $z \neq 0$ ha esattamente n radici n-esime; queste hanno tutte lo stesso modulo, pari a $\sqrt[n]{\rho}$, quindi stanno su di una circonferenza avente centro in $(0,0)$ e raggio pari a $\sqrt[n]{\rho}$. Dato che i loro argomenti differiscono per un angolo pari a $\dfrac{2\pi}{n}$, le n radici n-esime di z formano i vertici di un poligono regolare di n lati, inscritto nella circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\sqrt[n]{\rho}$; il primo di questi vertici ha per argomento $\dfrac{\alpha}{n}$.
Nella figura seguente vengono rappresentate le 6 radici seste di $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\mathrm{sen}\,\alpha)$.



Esempio 7 : Calcoliamo $\sqrt[4]{i}$. Essendo $i = 1 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ avremo:
$\sqrt[4]{i} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + k\,\dfrac{2\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + k\,\dfrac{2\pi}{4}\right)\right)$, $0 \leq k \leq 3$, da cui si ottengono:
per $k = 0$: $1 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{8}\right)$;
per $k = 1$: $1 \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\dfrac{5\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{5\pi}{8}\right)$;
per $k = 2$: $1 \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = \left(\cos\dfrac{9\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{9\pi}{8}\right)$;
per $k = 3$: $1 \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(\cos\dfrac{13\pi}{8} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{13\pi}{8}\right)$.
Dalle formule di bisezione $\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ e $\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}}$, essendo:
$\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4} = \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, otteniamo :
$\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ e $\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, dalle quali infine:
per $k = 0$ si ha: $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;
per $k = 1$ si ha: $-\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$;
per $k = 2$ si ha: $-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

per $k = 3$ si ha: $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Esempio 8 : Calcoliamo $\sqrt[n]{1}$. Essendo $1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$ avremo:
$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{0}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{0}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, $0 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N}$, ovvero:
$\sqrt[n]{1} = \cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)$, $0 \le k \le n-1$.

Riprendendo l'uguaglianza precedentemente trovata:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{\alpha}{n} + k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, $0 \le k \le n-1, k \in \mathbb{N}$,
per quanto visto sul prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica, potremo scrivere:
$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \sqrt[n]{1} \cdot \left(\cos\dfrac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{n}\right)\left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$,
dove $\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\dfrac{\alpha}{n} + i \operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{n}\right)$ rappresenta la prima radice n-esima del numero z, quella che corrisponde a $k = 0$, mentre $\left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{n}\right)\right)$, come visto nell'Esempio 8, rappresenta, per $0 \le k \le n-1$, le radici n-esime dell'unità 1. Quindi:
Teorema 6 : Le radici n-esime di un qualunque numero complesso $z \neq 0$ si possono ottenere calcolandone una sola, quella che corrisponde a $k = 0$, e moltiplicando poi questa per le n radici n-esime dell'unità 1.

Esempio 9 : Calcoliamo $\sqrt[4]{1}$ e da questa $\sqrt[4]{i}$. Avremo allora:
$\sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos\left(k\,\dfrac{2\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{2\pi}{4}\right)\right) = \left(\cos\left(k\,\dfrac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(k\,\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$, $0 \le k \le 3$,
e quindi: per $k = 0$ si ha $\cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$; per $k = 1$ si ha $\cos\dfrac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} = i$;
per $k = 2$ si ha $\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi = -1$; per $k = 3$ si ha $\cos\dfrac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\dfrac{3\pi}{2} = -i$.
Riprendendo la prima radice trovata per $\sqrt[4]{i}$, ovvero, per $k = 0$:
$\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, moltiplicandola per i, per -1 e per $-i$, ritroviamo le altre radici quarte di i trovate in precedenza. Infatti:
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \cdot i = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k = 1$;
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \cdot (-1) = -\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k = 2$;
$\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) \cdot (-i) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - i\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, quella per $k = 3$.

Esempio 10 : Calcoliamo $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right)^2}$. Essendo $\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\,i\right| = 1$, risulta:

$\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i = \cos\left(\dfrac{11}{6}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{11}{6}\,\pi\right)$, dalla quale otteniamo:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\, i\right)^2 = \cos\left(\frac{11}{3}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{11}{3}\,\pi\right) =$$

$$= \cos\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\frac{5}{3}\,\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\, i\,.$$

Sarà allora $\sqrt{\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i} = \cos\left(\dfrac{5}{6}\,\pi + k\,\dfrac{2\pi}{2}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5}{6}\,\pi + k\,\dfrac{2\pi}{2}\right)$, $0 \le k \le 1$:

per $k = 0$ otteniamo: $\cos\left(\dfrac{5}{6}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5}{6}\,\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\, i$;

per $k = 1$ otteniamo: $\cos\left(\dfrac{11}{6}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{11}{6}\,\pi\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i$.

Come si vede, quindi, non è corretto scrivere $\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i$.

Esempio 11 : Risolviamo l'equazione $x^2 + x + 1 = 0$.
Avremo allora $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$.
Essendo $\sqrt{-3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}$, otteniamo $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}\, i}{2}$, e quindi abbiamo due soluzioni, complesse e coniugate, $x_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$ e $x_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$.
Esempio 12 : Risolviamo l'equazione $x^3 + 1 = 0$, che ammette un'unica soluzione reale data da $x = -1$.
Da $x^3 = -1$, otteniamo $x = \sqrt[3]{-1}$, e quindi le tre radici di $z = 1 \cdot (\cos \pi + i \,\mathrm{sen}\, \pi)$:

$\sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{3} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$, $0 \le k \le 2$, ovvero:

per $k = 0$ si ha: $\cos\dfrac{\pi}{3} + i \,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$;
per $k = 1$ si ha: $\cos \pi + i \,\mathrm{sen}\, \pi = -1$;
per $k = 2$ si ha: $\cos\left(\dfrac{5}{3}\,\pi\right) + i \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5}{3}\,\pi\right) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, i$.
Si sono trovate quindi tre soluzioni, in numero pari al grado del polinomio $x^3 + 1$.

Passiamo infine alle **potenze ad esponente razionale**, $z^{\frac{m}{n}}$, $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; supponiamo che m e n siano primi tra loro, con $m \neq 1$.
In base alle definizioni precedenti, poniamo $z^{\frac{m}{n}} = (z^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z^m}$, ed operiamo di conseguenza. La potenza z^m ci dà un solo risultato, del quale vanno poi calcolate le n radici n-esime.

L'ESPONENZIALE COMPLESSA e^z, $z \in \mathbb{C}$
Preso un numero immaginario puro $z = x\, i$, $x \in \mathbb{R}$, diamo la seguente
Definizione 6 : Si definisce l'esponenziale $e^{x\,i}$ come:

$e^{x\,i} = \cos x + i\,\text{sen}\,x\,.$
Vediamo una giustificazione (non certo una dimostrazione !) di tale definizione utilizzando i polinomi di Mac Laurin delle funzioni reali e^x, $\text{sen}\,x$ e $\cos x$, anche se, più correttamente, si dovrebbero utilizzare i loro sviluppi in serie di potenze. Sappiamo che risulta:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + ... + \frac{x^n}{n\,!} + \text{o}(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k\,!}\; x^k + o(x^n)\,.$$

$$\text{sen}\,x = x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + \frac{x^9}{9\,!} - \;... + \frac{(\,-1)^n}{(2n+1)\,!}\,x^{2n+1} + o\big(x^{2n+1}\big)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + \frac{x^8}{8\,!} \;-\; ... + \frac{(\,-1)^n}{(2n)\,!}\,x^{2n} + o\big(x^{2n}\big)\,.$$

Sostituendo, in maniera formale in queste espressioni, alla variabile x la variabile $x\,i$, si ha:

$$e^{x\,i} = 1 + (x\,i) + \frac{(x\,i)^2}{2\,!} + \frac{(x\,i)^3}{3\,!} + \frac{(x\,i)^4}{4\,!} + \frac{(x\,i)^5}{5\,!} + \frac{(x\,i)^6}{6\,!} + \frac{(x\,i)^7}{7\,!} + ... \text{ da cui:}$$

$$e^{x\,i} = 1 + x\,i - \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!}\,i + \frac{x^4}{4\,!} + \frac{x^5}{5\,!}\,i - \frac{x^6}{6\,!} - \frac{x^7}{7\,!}\,i + ... \text{ ovvero:}$$

$$e^{x\,i} = \left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} - \frac{x^6}{6\,!} + ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^5}{5\,!} - \frac{x^7}{7\,!} + ...\right) \text{ e quindi:}$$

$e^{x\,i} = \cos x + i\,\text{sen}\,x\,.$
Preso ora $z \in \mathbb{C}$, $z = x + y\,i$, usando le proprietà delle potenze reali, poniamo:
$e^z = e^{x+y\,i} = e^x \cdot e^{y\,i} = e^x\,(\cos y + i\,\text{sen}\,y)$
ovvero otteniamo un numero complesso avente per modulo il numero reale positivo e^x e per argomento il coefficiente dell'immaginario y. Si ha infatti : $|\cos y + i\,\text{sen}\,y| = 1\,.$
Dalla definizione data segue subito, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, che:

$$e^{z+2k\pi\,i} = e^{x+y\,i+2k\pi\,i} = e^x \cdot e^{(y+2k\pi)\,i} = e^x\,(\cos\,(y+2k\pi) + i\,\text{sen}\,(y+2k\pi)) =$$

$= e^x\,(\cos y + i\,\text{sen}\,y) = e^z$, cioè la funzione complessa $z \to e^z$ è periodica di periodo $2\pi\,i\,.$

Esempio 13 : Calcoliamo e^i. Essendo $e^i = e^{0+1\cdot i}$ otteniamo:
$e^i = e^0\,(\cos 1 + i\,\text{sen}\,1) = \cos 1 + i\,\text{sen}\,1\,.$
Se calcoliamo $e^{2\pi i}$ avremo invece $e^{2\pi i} = e^{0+2\pi i} = e^0\,(\cos 2\pi + i\,\text{sen}\,2\pi) = 1\,.$

LOGARITMI DI NUMERI COMPLESSI $\log z,\, z \in \mathbb{C}$

Vediamo ora come definire il $\log z,\, z \in \mathbb{C},\, z \neq 0$. Posto $\log z = w$, otteniamo $z = e^w$.
Se poniamo $w = x + y\,i$, con x e y incogniti, e $z = \rho\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, ρ e α valori invece noti, imponiamo che sia: $e^w = e^{x+y\,i} = e^x\,(\cos y + i\,\text{sen}\,y) = \rho\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$, che risulta soddisfatta quando: $\begin{cases} e^x = \rho \\ y = \alpha + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ovvero se $\begin{cases} x\; = \log\rho \\ y = \alpha + 2k\pi,\, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$.
Notiamo che $\log\rho$ è sempre definito, essendo ρ un modulo e quindi una quantità reale sempre positiva; la seconda uguaglianza dipende dal poter rappresentare un punto del piano complesso in infiniti modi, vista l'identità di rappresentazione a meno di giri interi.
Sostituendo le uguaglianze trovate avremo allora:
$\log z = w = x + y\,i = \log\rho + (\alpha + 2k\pi)\,i,\; k \in \mathbb{Z}\,.$
Con questa uguaglianza si definiscono gli infiniti logaritmi di un numero complesso $z \neq 0$.
Questi hanno tutti la stessa parte reale, $\log\rho$, mentre varia, di 2π in 2π, il coefficiente della loro parte immaginaria. I valori di $\log z$ stanno quindi tutti su una retta perpendicolare all'asse reale, passante per il punto $(\log\rho, \alpha)$.
Il valore corrispondente ad $\alpha = 0$ viene detto **valore principale**.

Esempio 14 : Calcoliamo $\log(-1)$. Essendo $-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$, otteniamo: $\log(-1) = \log 1 + (\pi + 2k\pi)\,i = (2k+1)\,\pi\,i\,,\ k \in \mathbb{Z}$. Da questa ricaviamo anche: $e^{(2k+1)\pi i} = \cos((2k+1)\,\pi) + i\,\mathrm{sen}((2k+1)\,\pi) = -1$.

Esempio 15 : Calcoliamo $\log i$. Essendo $i = \left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avremo: $\log i = \log 1 + \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

Esempio 16 : Calcoliamo $\log(1+i)$.

Essendo $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$, avremo infine: $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

POTENZE AD ESPONENTE COMPLESSO

Per definire la potenza $w^z, w \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}, w \neq 0$, si usa l'uguaglianza, valida per le potenze reali di numeri a positivi: $a^x = e^{x \log a}$.

Definizione 7 : Si pone $w^z = e^{z \log w}$, dove sia l'esponenziale che il logaritmo vanno intesi in ambito complesso.

Esempio 17 : Calcoliamo i^i. Da $i = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{2}$ e da $\log i = \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) i$, otteniamo: $i^i = e^{i \log i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

La potenza i^i assume allora infiniti valori, che sono comunque tutti reali.

Calcoliamo ora $(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log(1+i)}$. Essendo $1 + i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, si è visto (Esempio 16) che $\log(1+i) = \log\sqrt{2} + \left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) i$, e quindi, sostituendo, otteniamo:

$$e^{(1-i)\log(1+i)} = e^{(1-i)\left(\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i\right)} = e^{\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) i - i\log\sqrt{2}+\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)} =$$
$$= e^{\log\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\log\sqrt{2}\right) i} = e^{\log\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi} \cdot e^{\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi-\log\sqrt{2}\right) i} =$$
$$= \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log\sqrt{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi - \log\sqrt{2}\right)\right).$$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE COMPLESSE

Dalla definizione $e^{x i} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x$, otteniamo, sostituendo $x\,i$ con $(-x\,i)$, la: $e^{-x i} = \cos(-x) + i\,\mathrm{sen}(-x) = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x$.

Sommando e sottraendo tra loro le due uguaglianze $\begin{cases} e^{x i} = \cos x + i\,\mathrm{sen}\,x \\ e^{-x i} = \cos x - i\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$ otteniamo:

$\begin{cases} e^{x i} + e^{-x i} = 2\cos x \\ e^{x i} - e^{-x i} = 2\,i\,\mathrm{sen}\,x \end{cases}$ e da queste: $\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{x i} + e^{-x i}}{2} \\ \mathrm{sen}\,x = \dfrac{e^{x i} - e^{-x i}}{2i} \end{cases}$.

Estendendo queste uguaglianze a $z \in \mathbb{C}$, otteniamo la definizione del **seno** e del **coseno** di un numero complesso: $\begin{cases} \cos z = \dfrac{e^{z i} + e^{-z i}}{2} \\ \mathrm{sen}\,z = \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{2i} \end{cases}$.

Da queste abbiamo poi anche $\mathrm{tg}\,z = \dfrac{\mathrm{sen}\,z}{\cos z} = \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{2i}\,\dfrac{2}{e^{z i} + e^{-z i}} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{e^{z i} - e^{-z i}}{e^{z i} + e^{-z i}}$.

ALGEBRA LINEARE

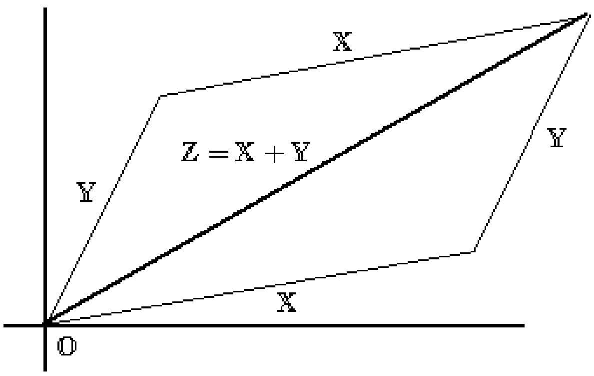
VETTORI
Consideriamo $\mathbb{R}^n$, prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ con sé stesso n volte, ovvero l'insieme formato da tutte le possibili n-uple di numeri reali $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Ogni n-upla verrà detta anche **vettore**. Ogni vettore verrà denotato con una lettera maiuscola o mediante la n-upla delle componenti che lo rappresenta: $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.
Se $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ si dirà anche che $\mathbb{X}$ ha n componenti oppure che è un vettore di dimensione n.
Dal punto di vista geometrico, ogni vettore $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ individua una retta, e precisamente la retta passante per il punto $\mathbb{O} = (0, 0, ..., 0)$ e per il punto $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
Il vettore $\mathbb{O} = (0, 0, ..., 0)$ prende il nome di **vettore nullo**.

OPERAZIONI SUI VETTORI
Siano dati due vettori: $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, aventi cioè uguale numero di componenti.
Definizione 8 : Si definisce la **somma** di due vettori come il vettore:
$\mathbb{X} + \mathbb{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Si estende facilmente la definizione alla somma di un numero qualunque di vettori.

Esempio 18 : se $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$ e $\mathbb{Y} = (5, 2, -3)$, allora $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = (8, 1, -3)$.

Valgono per la somma di vettori le proprietà:
S1) commutativa: $\mathbb{X} + \mathbb{Y} = \mathbb{Y} + \mathbb{X}$
S2) associativa: $\mathbb{X} + (\mathbb{Y} + \mathbb{Z}) = (\mathbb{X} + \mathbb{Y}) + \mathbb{Z}$.
S3) esiste ed è unico l'**elemento neutro** rispetto a tale operazione: $\mathbb{X} + \mathbb{O} = \mathbb{X}$.

La somma di due vettori è rappresentabile graficamente mediante la cosiddetta regola del parallelogramma: dati $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, il vettore somma $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ coincide con la diagonale del parallelogramma avente $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ per lati, come illustrato in figura:



Definizione 9 : Preso $k \in \mathbb{R}$ (detto anche **scalare**), si definisce il **prodotto dello scalare** k **per il vettore** $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ come il vettore: $k \cdot \mathbb{X} = (k\, x_1, k\, x_2, ..., k\, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Esempio 19 : se $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$ e $k = 5$, si ha $5 \cdot \mathbb{X} = (15, -5, 0)$.

Per il prodotto di uno scalare per un vettore, dati $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$, valgono le seguenti proprietà:
P1) $k_1 \cdot k_2 \cdot \mathbb{X} = k_1 \cdot (k_2 \cdot \mathbb{X}) = k_2 \cdot (k_1 \cdot \mathbb{X}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \mathbb{X}$;

P2) $(k_1 + k_2) \cdot \mathbb{X} = k_1 \cdot \mathbb{X} + k_2 \cdot \mathbb{X}$;
P3) $k \cdot (\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = k \cdot \mathbb{X} + k \cdot \mathbb{Y}$.

Moltiplicare un vettore $\mathbb{X}$ per uno scalare k significa ottenere un vettore che sta sulla stessa retta di $\mathbb{X}$, orientato dalla stessa parte di $\mathbb{X}$ se $k > 0$, da parte opposta se $k < 0$, più lungo di $\mathbb{X}$ se $k > 1$ o se $k < -1$, più corto di $\mathbb{X}$ se $-1 < k < 1$.

Definizione 10 : Dati p vettori $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p \in \mathbb{R}^n$ e p scalari $k_1, k_2, ..., k_p \in \mathbb{R}$, si definisce la **combinazione lineare** di questi vettori, con i dati scalari k_i, come il vettore:

$$k_1 \mathbb{X}_1 \; + \; k_2 \mathbb{X}_2 \; + \; ... \; + \; k_p \mathbb{X}_p = \sum_{i=1}^{p} k_i \mathbb{X}_i \, ,$$

ovvero la somma dei p vettori $\mathbb{X}_i$, ciascuno moltiplicato per il corrispondente scalare k_i.

Esempio 20 : Presi $\mathbb{X} = (3, -1, 0)$, $\mathbb{Y} = (5, 2, -3)$ e $\mathbb{Z} = (-4, 2, 2)$, e scelti $k_1 = 3$, $k_2 = -2$ e $k_3 = 2$, avremo: $3 \cdot \mathbb{X} \; + \; (-2) \cdot \mathbb{Y} \; + \; 2 \cdot \mathbb{Z} = (-9, -3, 10)$.

Definizione 11 : La **differenza** di due vettori si può definire come la loro combinazione lineare a coefficienti 1 e -1: $\mathbb{X} - \mathbb{Y} = 1 \cdot \mathbb{X} + (-1) \cdot \mathbb{Y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$.
Esiste unico l'elemento inverso rispetto alla somma (l'opposto): $\mathbb{X} - \mathbb{X} = \mathbb{X} + (-1)\,\mathbb{X} = \mathbb{O}$.
Anche la differenza di due vettori può essere rappresentata graficamente. Posto $\mathbb{Z} = \mathbb{X} + \mathbb{Y}$, otteniamo $\mathbb{Y} = \mathbb{Z} - \mathbb{X}$, per la quale, facendo riferimento alla figura relativa alla regola del parallelogramma, vediamo come il vettore $\mathbb{Y}$, che rappresenta appunto la differenza, sia il vettore che partendo dal punto $\mathbb{X}$, il vettore che si sottrae, porta al punto $\mathbb{Z}$, quello da cui si sottrae.

SPAZI E SOTTOSPAZI VETTORIALI

Le operazioni che abbiamo definito, se eseguite su vettori di $\mathbb{R}^n$, danno per risultato ancora un vettore di $\mathbb{R}^n$.
La moltiplicazione di un vettore $\mathbb{X}$ per uno scalare k dà per risultato un vettore che appartiene alla stessa retta di $\mathbb{X}$, e che sarà orientato nello stesso verso di $\mathbb{X}$ se lo scalare k è positivo, o nel verso opposto se k è negativo.
Due vettori $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ di $\mathbb{R}^n$ stanno su di una stessa retta, o appartengono alla stessa retta, se e solo se $\mathbb{X} = k \cdot \mathbb{Y}$, con k scalare opportunamente scelto; in questo caso i due vettori si dicono **paralleli**.
Due vettori $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ di $\mathbb{R}^n$, che non stiano su una stessa retta, individuano un piano in $\mathbb{R}^n$ passante per $\mathbb{O}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, ed una qualunque combinazione lineare di essi darà per risultato un vettore che appartiene allo stesso piano.
Un insieme nel quale siano definite le due operazioni, quella di somma e quella di prodotto per uno scalare, con le proprietà precedentemente elencate, si dice uno **spazio vettoriale**.
Più precisamente, vale la
Definizione 12 : Un insieme $\mathbb{V}$ si dice uno **spazio vettoriale** se:
$\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{V} \;\Rightarrow\; k_1 \cdot \mathbb{X} + k_2 \cdot \mathbb{Y} \in \mathbb{V}$,
ovvero se ogni combinazione lineare di elementi dell'insieme appartiene ancora all'insieme.
L'insieme $\mathbb{R}$ (la retta), $\mathbb{R}^2$ (il piano), $\mathbb{R}^3$, ... , $\mathbb{R}^n$ costituiscono i principali esempi di spazi vettoriali reali, di dimensione rispettivamente $1, 2, 3, ...\; n$. Il punto (o vettore) $\mathbb{O}$ si può considerare come lo spazio vettoriale a dimensione 0.

Esempio 21 : L'insieme dei Polinomi $\mathrm{P}(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + ... + a_1\, x + a_0$ costituisce uno spazio vettoriale, in quanto ogni combinazione lineare di polinomi è ancora un polinomio.
Esempio 22 : L'insieme delle funzioni continue in un punto x_0 costituisce uno spazio vettoriale in quanto la combinazione lineare di funzioni continue in x_0 è ancora una funzione continua in x_0. Analogamente per le funzioni derivabili in x_0.

Con analoga definizione, un sottoinsieme $\mathbb{A} \subset \mathbb{V}$ si dice un **sottospazio vettoriale** se:
$\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e $\forall\, \mathbb{X}, \mathbb{Y} \in \mathbb{A} \;\Rightarrow\; k_1 \cdot \mathbb{X} + k_2 \cdot \mathbb{Y} \in \mathbb{A}$.
Ad esempio, ogni retta ($\mathbb{R}$) è un sottospazio vettoriale del piano $\mathbb{R}^2$, di $\mathbb{R}^3$, e di un qualunque $\mathbb{R}^n$; ogni piano ($\mathbb{R}^2$) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, di $\mathbb{R}^4$, e di un qualunque $\mathbb{R}^n$, e così via.

DIPENDENZA E INDIPENDENZA LINEARE
Siano dati p vettori di $\mathbb{R}^n$, con $p \le n$: $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p$;
Definizione 13 : I vettori $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p$ si dicono **linearmente dipendenti** se si possono determinare p scalari $k_1, k_2, ..., k_p$, non tutti nulli (cioè con almeno uno di essi diverso da zero), tali che: $k_1 \cdot \mathbb{X}_1 + k_2 \cdot \mathbb{X}_2 + ... + k_p \cdot \mathbb{X}_p = \mathbb{O}$.
Se l'unico modo per ottenere il vettore nullo come risultato della combinazione lineare è quello di prendere tutti gli scalari k_i uguali a zero, allora i p vettori si dicono **linearmente indipendenti**.
Se p vettori sono linearmente dipendenti, ciascuno dei vettori aventi, nella combinazione lineare che dà per risultato il vettore nullo, un coefficiente diverso da zero, può essere espresso come combinazione lineare degli altri vettori. Infatti, supposto $k_i \neq 0$, dalla:
$k_1 \cdot \mathbb{X}_1 \,+\, k_2 \cdot \mathbb{X}_2 \,+\, ... \,+\, k_i \cdot \mathbb{X}_i \,+ ... +\, k_p \cdot \mathbb{X}_p = \mathbb{O}$, otteniamo:
$k_i \cdot \mathbb{X}_i = \,-\, k_1 \cdot \mathbb{X}_1 \,-\, k_2 \cdot \mathbb{X}_2 \,-\, ... \,-\, k_{i-1} \cdot \mathbb{X}_{i-1} \,-\, k_{i+1} \cdot \mathbb{X}_{i+1} \,-\, ... \,-\, k_p \cdot \mathbb{X}_p$,
da cui poi

$$\mathbb{X}_i = -\frac{k_1}{k_i} \cdot \mathbb{X}_1 - \frac{k_2}{k_i} \cdot \mathbb{X}_2 - ... - \frac{k_{i-1}}{k_i} \cdot \mathbb{X}_{i-1} - \frac{k_{i+1}}{k_i} \cdot \mathbb{X}_{i+1} - ... - \frac{k_p}{k_i} \cdot \mathbb{X}_p,$$

ovvero, posto $h_j = -\dfrac{k_j}{k_i}$, possiamo scrivere:
$\mathbb{X}_i = h_1 \cdot \mathbb{X}_1 + h_2 \cdot \mathbb{X}_2 \,+\, ... \,+ h_{i-1} \cdot \mathbb{X}_{i-1} \,+\, h_{i+1} \cdot \mathbb{X}_{i+1} \,+\, ... \,+\, h_p \cdot \mathbb{X}_p$.
Questo non sarebbe possibile se i vettori fossero linearmente indipendenti.

Da un punto di vista geometrico, dire che p vettori di $\mathbb{R}^n$, con $p \le n$, sono linearmente dipendenti significa che essi appartengono ad uno stesso sottospazio $\mathbb{R}^k$, la cui dimensione k è minore del numero p dei vettori.

Esempio 23 : 4 vettori di $\mathbb{R}^5$ o 4 vettori di $\mathbb{R}^8$ possono essere linearmente dipendenti o perchè stanno tutti su una stessa retta ($\mathbb{R}$), o in uno stesso piano ($\mathbb{R}^2$), o in uno stesso $\mathbb{R}^3$ ($3 < 4$!).

L'esempio più semplice di vettori linermente dipendenti è fornito da due vettori, a qualunque $\mathbb{R}^n$ appartengano, che stanno sulla stessa retta, ovvero che sono paralleli.
Se, dati p vettori di $\mathbb{R}^n$: $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_p$, uno di essi è il vettore nullo $\mathbb{O}$, allora i vettori risulteranno comunque linearmente dipendenti; basta dare a ciascun vettore non nullo un coefficiente uguale a 0 e ad $\mathbb{O}$ un qualunque coefficiente diverso da 0; tale combinazione lineare darà ovviamente per risultato $\mathbb{O}$.

INSIEMI DI GENERATORI E BASI DI UNO SPAZIO VETTORIALE

Si può dimostrare, ma qui ci limitiamo ad enunciarlo, che il massimo numero di vettori tra loro linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ uguaglia il numero delle loro componenti, ovvero che sono linearmente indipendenti tra loro al massimo n vettori di $\mathbb{R}^n$.
Ne segue che se prendiamo n vettori di $\mathbb{R}^n$ linearmente indipendenti $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$, un qualunque altro vettore $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ potrà sempre essere espresso mediante una opportuna combinazione lineare di alcuni, anche di tutti, degli $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$.
Definizione 14 : Presi m vettori di $\mathbb{R}^n$, $m \geq n$, se ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ risulta esprimibile come loro combinazione lineare, si dice che essi costituiscono un **insieme di generatori** di $\mathbb{R}^n$.
Definizione 15 : Presi esattamente n vettori di $\mathbb{R}^n$, che risultino linearmente indipendenti, si dice che essi costituiscono una **base** di $\mathbb{R}^n$.
Una base è quindi un insieme di generatori minimo in quanto ad elementi che lo costituiscono. Ogni vettore $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ può sempre essere espresso come combinazione lineare dei vettori di una base.

La **dimensione** di uno spazio o di un sottospazio vettoriale coincide con il numero massimo di vettori linearmente indipendenti che in esso si possono determinare, e coincide con il numero degli elementi necessari a costituire una base di tale spazio.

Esempio 24 : Dato che la dimensione di $\mathbb{R}$ è 1, basta un vettore (non nullo) per generare $\mathbb{R}$.
Ad esempio il vettore 1 genera qualsiasi numero $k \in \mathbb{R}$: basta moltiplicare 1 per k.
Ci vogliono due vettori, invece, che non stiano su una stessa retta, per generare ogni altro vettore di $\mathbb{R}^2$, spazio a dimensione 2. Ad esempio: $(x, y) = x\,(1, 0) + y\,(0, 1), \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
L'insieme dei polinomi, quello delle funzioni continue e quello delle funzioni derivabili in x_0 sono invece esempi di spazi vettoriali a dimensione infinita.

Il più semplice esempio di base in $\mathbb{R}^n$ è costituito dalla cosiddetta **base canonica**, cioè quella formata dai vettori aventi una componente uguale ad 1 e tutte le altre uguali a 0.

Esempio 25 : La base canonica di $\mathbb{R}^2$ è data da E_2: $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0); \mathbf{e}_2 = (0, 1)\}$, quella di $\mathbb{R}^3$ è data da E_3: $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0); \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0); \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$.

Vale il seguente:
Teorema 7 : Data una base di $\mathbb{R}^n$, è unica la rappresentazione, mediante quella base, di un qualunque vettore $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$.
Dimostrazione: Procediamo per assurdo, supponendo, scelto un vettore $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^n$ e scelta una base $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n\}$ per $\mathbb{R}^n$, che sia:
$\mathbb{Y} = \alpha_1 \cdot \mathbb{X}_1 + \alpha_2 \cdot \mathbb{X}_2 + ... + \alpha_n \cdot \mathbb{X}_n$ ed anche:
$\mathbb{Y} = \beta_1 \cdot \mathbb{X}_1 + \beta_2 \cdot \mathbb{X}_2 + ... + \beta_n \cdot \mathbb{X}_n$, con qualche $\alpha_i \neq \beta_i$.
Sottraendo membro a membro avremo allora:
$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \mathbb{X}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \mathbb{X}_2 + ... + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \mathbb{X}_n = \mathbb{O}$.
Se almeno una delle differenze $(\alpha_i - \beta_i)$ fosse diversa da zero, questo significherebbe che i vettori $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ sono linearmente dipendenti, contro l'ipotesi, per cui $\alpha_i = \beta_i, \forall\, i$ e la rappresentazione di $\mathbb{Y}$ risulta quindi unica. ●

PRODOTTO SCALARE, MODULO, DISTANZA EUCLIDEA

Definizione 16 : Dati due vettori di $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si definisce **prodotto scalare** dei due vettori, indicato con $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$, (o con $< \mathbb{X}, \mathbb{Y} >$) la somma dei prodotti delle loro componenti di uguale indice:

$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = x_1\, y_1 \;+\; x_2\, y_2 \;+\; .. \;+\; x_n\, y_n \;= \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

Notiamo quindi che $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}$ dà per risultato un numero reale e non un vettore, e questo spiega il nome di prodotto scalare.

Esempio 26 : se $\mathbb{X} = (3, \,-1, 0)$ e $\mathbb{Y} = (5, 2, \,-3)$, si ha:
$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = 3 \cdot 5 + (\,-1) \cdot 2 + 0 \cdot (\,-3) = 13$.

Definizione 17 : Si definisce **modulo** (o norma) di un vettore $\mathbb{X}$, e si indica con $\|\mathbb{X}\|$, la radice quadrata del prodotto scalare del vettore $\mathbb{X}$ per se stesso: $\|\mathbb{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

Un vettore il cui modulo sia uguale ad 1 verrà detto **versore** o **vettore normalizzato**.
Dato un vettore $\mathbb{X}$, per costruire il suo versore $\mathbb{X}_{\text{v}}$ si calcola $\mathbb{X}_{\text{v}} = \dfrac{\mathbb{X}}{\|\mathbb{X}\|} = \dfrac{1}{\|\mathbb{X}\|} \cdot \mathbb{X}$.

Esempio 27 : se $\mathbb{X} = (3, \,-1, 0)$ risulta: $\|\mathbb{X}\| = \sqrt{3^2 + (\,-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$.
Per ottenere il versore basta calcolare $\dfrac{1}{\sqrt{10}} \cdot \mathbb{X} = \left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}, \dfrac{-1}{\sqrt{10}}, 0 \right)$.

In $\mathbb{R}^2$ tutti i versori sono esprimibili nella forma $v = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$.

Definizione 18 : Dati due vettori $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, si definisce la **distanza** (euclidea) dei due vettori come il numero reale non negativo:
$\|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$.
Il modulo di un vettore $\mathbb{X}$ coincide con la distanza del vettore $\mathbb{X}$ dal vettore nullo $\mathbb{O}$.
Nel caso $n = 2$ con la $\|\mathbb{X} - \mathbb{Y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ ritroviamo la formula della distanza tra due punti (x_1, x_2) e (y_1, y_2) nel piano cartesiano.

PROPRIETA' DEL PRODOTTO SCALARE
Vale la seguente uguaglianza (detta di Schwarz):
$\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\| \cdot \cos \alpha$, dove α è l'angolo formato dai due vettori.
Se $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ il prodotto scalare è nullo: $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = 0$, e i due vettori si dicono **perpendicolari**.
Se $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ si ha $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} > 0$, mentre se $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ si ha $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} < 0$; quindi se i due vettori formano un angolo acuto il loro prodotto scalare è positivo, altrimenti negativo.
Se $\alpha = 0$, cioè se i vettori sono paralleli con uguale verso, il prodotto scalare è massimo, mentre se $\alpha = \pi$, ovvero i vettori sono paralleli ma con verso opposto, il prodotto scalare è minimo.

Valgono, per il modulo, due disuguaglianze:
-la disuguaglianza triangolare: $\|\mathbb{X} + \mathbb{Y}\| \leq \|\mathbb{X}\| + \|\mathbb{Y}\|$,
ovvero il modulo di una somma è minore o uguale della somma dei moduli, e
-la disuguaglianza di Schwarz: $|\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y}| \leq \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\|$,

ovvero il valore assoluto del prodotto scalare di due vettori è minore o uguale del prodotto dei moduli dei due vettori.
Quest'ultima discende subito dalla $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \|\mathbb{X}\| \cdot \|\mathbb{Y}\| \cdot \cos\alpha$, sostituendo a $\cos\alpha$ il suo valore massimo, ovvero 1.

MATRICI
Il modo più semplice di introdurre il concetto di matrice è quello di definire le matrici come tabelle di numeri reali, ordinate per linee orizzontali e verticali: le righe e le colonne.
Anche le matrici verranno indicate con lettere maiuscole, e scriveremo, ad esempio:

$$\mathbb{A}_{m,n} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .... & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .... & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & .... & .... & a_{in} \\ .... & .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & .... & .... & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Il primo dei due indici alla base dell'elemento è detto indice di riga, l'altro di colonna, e diremo che la matrice $\mathbb{A}$ è una matrice $(m \cdot n)$ se essa è formata da m righe ed n colonne.
Una matrice può essere infatti definita anche come un insieme di vettori ordinati, in orizzontale le righe, ed in verticale le colonne.
Scrivendo $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$, indichiamo la matrice $\mathbb{A}$ formata da m righe ed n colonne il cui generico elemento di posto (i, j) è a_{ij}.
Chiameremo $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, ..., \mathrm{R}_m$ le sue righe, ciascuna delle quali è un vettore di $\mathbb{R}^n$, avente cioè tante componenti quante sono le colonne della matrice, ed in modo simile indicheremo con $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, ..., \mathrm{C}_n$ le sue colonne, che sono invece vettori di $\mathbb{R}^m$ ed hanno ciascuna m componenti, tante quante sono le righe di $\mathbb{A}$.
Scriveremo $\mathbb{A} = \left[\mathrm{C}_1 \middle| \mathrm{C}_2 \middle| ... \middle| \mathrm{C}_n\right]$ per indicare la matrice $\mathbb{A}$ mediante le sue colonne, mentre scriveremo, meglio se in verticale, $\mathbb{A} = \left[\mathrm{R}_1 \middle| \mathrm{R}_2 \middle| ... \middle| \mathrm{R}_m\right]$ per indicarla mediante le sue righe.
Una matrice si dice **quadrata** se il numero n delle sue righe è uguale a quello delle colonne (questo numero è detto **ordine** della matrice e la matrice verrà denotata con $\mathbb{A}_n$), altrimenti essa è detta **rettangolare**.

MATRICI PARTICOLARI
I vettori possono essere considerati come particolari matrici, del tipo $(m \cdot 1)$ se vettori colonna, del tipo $(1 \cdot n)$ se vettori riga.
Data una matrice $\mathbb{A}_{m,n}$, si dice **sottomatrice** $(h \cdot k)$ di $\mathbb{A}$ la matrice $(h \cdot k)$ ottenuta prendendo gli elementi di $\mathbb{A}$ comuni ad h righe e k colonne e scartando tutti gli altri.
Si dice **matrice nulla**, indicata con $\mathbb{O}$, una matrice i cui elementi siano tutti uguali a zero.

MATRICI QUADRATE PARTICOLARI
Definizione 19 : Una matrice quadrata si dice **diagonale** se gli unici elementi diversi da zero sono gli elementi che stanno sulla cosiddetta **diagonale principale**, ovvero gli elementi che hanno uguali i due indici.
Definizione 20 : Una matrice diagonale è detta matrice **scalare** se gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali tra loro.
Definizione 21 : Una matrice quadrata è detta **triangolare** alta (bassa) se gli elementi al di sotto (al di sopra) della diagonale principale sono tutti nulli.

Esempio 28 : Le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{C} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ sono, rispettivamente, una matrice diagonale, una matrice scalare e una matrice triangolare alta.

Definizione 22 : Una matrice quadrata è detta **simmetrica** se $a_{ij} = a_{ji}$, ovvero gli elementi situati in posizioni simmetriche rispetto alla diagonale principale.

Esempio 29 : La matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & 6 \\ -3 & 6 & 4 \end{Vmatrix}$ è una matrice simmetrica.

Definizione 23 : La **matrice unità** (o identità) di ordine n, indicata con $\mathbb{I}_n$, è la matrice scalare avente tutti gli elementi della diagonale principale uguali ad 1.

Esempio 30 : $\mathbb{I}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{I}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

Definizione 24 : Per **matrice di permutazione** si intende una matrice ottenuta scambiando tra loro alcune righe (o alcune colonne) della matrice identità.
Quindi in ogni riga ed in ogni colonna di una matrice di permutazione vi è un solo elemento uguale a 1 mentre tutti gli altri sono uguali a 0.

Esempio 31 : $\mathbb{P}_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{P}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ sono matrici di permutazione.

OPERAZIONI SULLE MATRICI
Le principali operazioni sulle matrici non sono altro che una estensione delle analoghe operazioni definite per i vettori.

Definizione 25 : Date $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$ e $\mathbb{B}_{m,n} = [b_{ij}]$, ambedue con m righe ed n colonne, si definisce la **matrice somma** come la matrice, anch'essa $(m \cdot n)$, avente come elemento di indici (i, j) la somma degli elementi di indici (i, j) delle matrici date:
$\mathbb{C}_{m,n} = [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$.

Definizione 26 : Il **prodotto di uno scalare** k **per una matrice** $\mathbb{A}_{m,n}$ è definito come $(k \cdot \mathbb{A})_{m,n} = [k \cdot a_{ij}]$, ovvero la matrice avente per elementi gli elementi della matrice data $\mathbb{A}$, ciascuno moltiplicato per lo scalare k.

Definizione 27 : Una combinazione lineare di quante si vogliano matrici, tutte comunque aventi m righe ed n colonne, a coefficienti scalari dati, si definisce come la matrice avente per elemento di posto (i, j) la combinazione lineare, con gli stessi coefficienti, degli elementi di posto (i, j) delle matrici date.
Limitandoci al caso di due sole matrici, $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$ e $\mathbb{B}_{m,n} = [b_{ij}]$, avremo:
$\alpha \cdot \mathbb{A}_{m,n} + \beta \cdot \mathbb{B}_{m,n} = [\alpha \cdot a_{ij} + \beta \cdot b_{ij}]$.

Esempio 32 : Se $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{Vmatrix}$, sarà allora:

$$\mathbb{C} = 3 \cdot \mathbb{A} + 2 \cdot \mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 3+2 & 9+0 & -12+0 \\ 0+6 & 3-2 & 6-4 \\ 3+0 & -6+6 & 15+4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 & 9 & -12 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 19 \end{Vmatrix}.$$

Definizione 28 : Si definisce **Trasposta** della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$ la matrice $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}_{n,m}$ avente per elemento di posto (i, j) l'elemento di posto (j, i) della matrice $\mathbb{A}$, ovvero la matrice avente, per righe e colonne, rispettivamente, le colonne e le righe di $\mathbb{A}$.

Esempio 33 : se $\mathbb{A}_{3,4} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 5 & 6 \end{Vmatrix}$, allora $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}_{4,3} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{Vmatrix}$.

Proprietà della Trasposta

T1) $\mathbb{A} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$, ovvero la Trasposta della Trasposta di una matrice è la matrice data;

T2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} + \mathbb{B}^{\mathrm{T}}$;

T3) $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ se e solo se la matrice $\mathbb{A}$ è una matrice simmetrica.

PRODOTTI TRA MATRICI

Molti sono i prodotti che si possono definire tra due matrici. Noi tratteremo solo il cosiddetto prodotto "righe per colonne", che, tra le altre proprietà, gode della proprietà associativa.
Poi tratteremo il prodotto di Kronecker tra due matrici, che da per risultato una matrice a blocchi.

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE TRA MATRICI

Il **prodotto righe per colonne** tra due matrici è basato sul prodotto scalare di due vettori, in questo caso le righe della prima matrice per le colonne della seconda.
Quindi due matrici saranno tra loro moltiplicabili "righe per colonne" solo se i vettori riga della prima e i vettori colonna della seconda hanno lo stesso numero di componenti, e questo accade quando il numero delle colonne della prima matrice è uguale al numero delle righe della seconda.

Definizione 29 : Date due matrici $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$, e $\mathbb{B}_{n,p} = [b_{ij}]$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le p$, si definisce la matrice prodotto $\mathbb{C}_{m,p} = \mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{B}_{n,p}$, avente, come si vede, tante righe, m, quante la prima matrice e tante colonne, p, quante la seconda, nel seguente modo: il suo elemento di posto (i, j), c_{ij}, è dato dal prodotto scalare del vettore $\mathrm{R}_i^{\mathbb{A}}$, i-esima riga della matrice $\mathbb{A}$ per il vettore $\mathrm{C}_j^{\mathbb{B}}$, j-esima colonna della matrice $\mathbb{B}$, ovvero:

$$c_{ij} = \mathrm{R}_i^{\mathbb{A}} \cdot \mathrm{C}_j^{\mathbb{B}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Per questo prodotto tra matrici vale la proprietà associativa: $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C}$ mentre non vale la proprietà commutativa: in genere si ha che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$; l'uguaglianza potrebbe essere soddisfatta se le due matrici fossero ambedue quadrate e dello stesso ordine, ma si possono fare esempi di come, anche in questo caso, non valga, in generale, la proprietà commutativa.

Esempio 34 : Date le due matrici $\mathbb{A}_{2,2} = \begin{Vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}_{2,2} = \begin{Vmatrix} 1 & -4 \\ -3 & 7 \end{Vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{A}_{2,2} \cdot \mathbb{B}_{2,2} = \begin{Vmatrix} 3 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) & 3 \cdot (-4) + (-2) \cdot 7 \\ 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-3) & 0 \cdot (-4) + 5 \cdot 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 9 & -26 \\ -15 & 35 \end{Vmatrix}$ mentre

$\mathbb{B}_{2,2} \cdot \mathbb{A}_{2,2} = \begin{Vmatrix} 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5 \\ (-3) \cdot 3 + 7 \cdot 0 & (-3) \cdot (-2) + 7 \cdot 5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 & -22 \\ -9 & 41 \end{Vmatrix}$.

Calcolati i due prodotti si vede quindi che risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$.

Se consideriamo una matrice $\mathbb{A}_{m,n}$ e le matrici unità $\mathbb{I}_m$ ed $\mathbb{I}_n$, avremo che:
$\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{A}_{m,n} = \mathbb{I}_m \cdot \mathbb{A}_{m,n}$.
Notiamo poi come, diversamente dal prodotto tra numeri reali, il prodotto di due matrici possa dare per risultato la matrice nulla $\mathbb{O}$ anche se nessuna delle due matrici fattori lo è. Non vale quindi la legge di annullamento del prodotto.

Esempio 35 : Date $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}$, eseguendo il prodotto righe per colonne, otteniamo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$ mentre $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \begin{Vmatrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{Vmatrix}$.

Valgono per il prodotto righe per colonne tra matrici le seguenti proprietà:
P1) associativa: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{C} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \cdot \mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C})$;
P2) distributiva: $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} + \mathbb{A} \cdot \mathbb{C}$ e $(\mathbb{B} + \mathbb{C}) \cdot \mathbb{A} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{A} + \mathbb{C} \cdot \mathbb{A}$;
P3) se $k \in \mathbb{R}$: $(k \cdot \mathbb{A}) \cdot \mathbb{B} = k \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})$;
P4) $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{\mathrm{T}} = \mathbb{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$, ovvero la trasposta di un prodotto è uguale al prodotto delle trasposte, ma in ordine inverso.

Le matrici quadrate possono essere moltiplicate per se stesse più volte, perché tale prodotto da luogo a matrici che hanno sempre lo stesso numero di righe e di colonne. Questa ripetuta moltiplicazione può essere definita come la potenza di una matrice. Questo non è possibile per le matrici rettangolari.
Se $\mathbb{A}$ è una matrice quadrata, poniamo: $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}$. Analogamente indichiamo con $\mathbb{A}^k$ il prodotto della matrice $\mathbb{A}$ per se stessa k volte, che viene detta **potenza** k-esima della matrice $\mathbb{A}$.

La trasposta di una potenza coincide con la potenza della trasposta: $\left(\mathbb{A}^k\right)^{\mathrm{T}} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^k$.
Infatti: $\left(\mathbb{A}^k\right)^{\mathrm{T}} = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} \cdot ... \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{A})^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot ... \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^k$.

Se $\mathbb{B} = \mathbb{A}^2$, possiamo allora anche scrivere: $\mathbb{A} = \mathbb{B}^{\frac{1}{2}}$.

Esempio 36 : Se $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$, risulta $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix} = \mathbb{B}$ e quindi:
$\begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}^2$ e $\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{Vmatrix}^{\frac{1}{2}}$.

Una matrice $\mathbb{A}$ per la quale risulti $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$ viene detta **idempotente**.
Una matrice $\mathbb{A}$ per la quale risulti $\mathbb{A}^k = \mathbb{O}$ viene detta **nilpotente** di indice k.

PRODOTTO DI KRONECKER TRA MATRICI

Esistono altri tipi di prodotto tra matrici. Uno di questi, molto usato in statistica, è il cosiddetto prodotto secondo Kronecker, che viene indicato con il simbolo $\otimes$.

Definizione 30 : Siano date due matrici $\mathbb{A}_{m,n} = [a_{ij}]$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, e $\mathbb{B}_{p,q} = [b_{ij}]$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.

Si definisce la matrice prodotto secondo Kronecker $\mathbb{K}_{m \cdot p, n \cdot q} = \mathbb{A}_{m,n} \otimes \mathbb{B}_{p,q}$, avente, come si vede, tante righe, $m \cdot p$, pari al prodotto tra il numero delle righe di $\mathbb{A}$ e quelle di $\mathbb{B}$, e tante colonne, $n \cdot q$, pari al prodotto tra il numero delle colonne di $\mathbb{A}$ e quelle di $\mathbb{B}$, nel seguente modo: al posto del suo elemento k_{ij} troviamo la sottomatrice data dal prodotto $a_{ij} \cdot \mathbb{B}$.

Esempio 37 : Date le due matrici $\mathbb{A}_{2,2} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}_{2,3} = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix}$, avremo:

$$\mathbb{K}_{2 \cdot 2, 2 \cdot 3} = \mathbb{K}_{4,6} = \begin{Vmatrix} a_{11} \cdot \mathbb{B} & a_{12} \cdot \mathbb{B} \\ a_{21} \cdot \mathbb{B} & a_{22} \cdot \mathbb{B} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} & a_{12} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} \\ a_{21} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} & a_{22} \cdot \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} a_{11} \cdot b_{11} & a_{11} \cdot b_{12} & a_{11} \cdot b_{13} & a_{12} \cdot b_{11} & a_{12} \cdot b_{12} & a_{12} \cdot b_{13} \\ a_{11} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{22} & a_{11} \cdot b_{23} & a_{12} \cdot b_{21} & a_{12} \cdot b_{22} & a_{12} \cdot b_{23} \\ a_{21} \cdot b_{11} & a_{21} \cdot b_{12} & a_{21} \cdot b_{13} & a_{22} \cdot b_{11} & a_{22} \cdot b_{12} & a_{22} \cdot b_{13} \\ a_{21} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{22} & a_{21} \cdot b_{23} & a_{22} \cdot b_{21} & a_{22} \cdot b_{22} & a_{22} \cdot b_{23} \end{Vmatrix}.$$

Esempio 38 : Date le due matrici $\mathbb{A}_{2,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}_{3,4} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$, avremo:

$$\mathbb{K}_{2 \cdot 3, 2 \cdot 4} = \mathbb{K}_{6,8} = \begin{Vmatrix} 1 \cdot \mathbb{B} & 2 \cdot \mathbb{B} \\ 3 \cdot \mathbb{B} & 4 \cdot \mathbb{B} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} & 2 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \\ 3 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} & 4 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 12 & 12 & 12 & 12 \end{Vmatrix}.$$

Non esistono restrizioni sulla eseguibilità di tale prodotto, potendosi moltiplicare due qualunque matrici tra loro indipendentemente dalle loro dimensioni.

Facilmente si vede che $\mathbb{A} \otimes \mathbb{O} = \mathbb{O} \otimes \mathbb{A} = \mathbb{O}$.

Per il prodotto secondo Kronecker tra matrici vale la proprietà di annullamento del prodotto, ovvero: $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} = \mathbb{O} \Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{O}$ e/o $\mathbb{B} = \mathbb{O}$.

Non vale la proprietà commutativa, ovvero in generale risulta $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \neq \mathbb{B} \otimes \mathbb{A}$.

Vale invece la proprietà associativa, ovvero risulta, $\forall$ $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$:

$\mathbb{A} \otimes \mathbb{B} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{A} \otimes (\mathbb{B} \otimes \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C}$.
Vale la proprietà distributiva: $(\mathbb{A} + \mathbb{B}) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{A} \otimes \mathbb{C} + \mathbb{B} \otimes \mathbb{C}$.
Per la trasposta vale, diversamente dal prodotto righe per colonne, la seguente proprietà: $(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B})^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbb{B}^{\mathrm{T}}$.

OPERAZIONI ELEMENTARI SULLE LINEE DI UNA MATRICE
Si dicono **operazioni elementari** sulle linee (righe e/o colonne) di una matrice le seguenti:
1) scambiare tra loro due righe o due colonne: $\mathrm{L}_i \rightleftarrows \mathrm{L}_j$
2) moltiplicare gli elementi di una linea per una costante k diversa da zero: $\mathrm{L}_i \leftarrow k \cdot \mathrm{L}_i$;
3) sostituire ad una linea la linea stessa più una combinazione lineare di altre linee: $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \sum \alpha_j \cdot \mathrm{L}_j \ \ (j \neq i)$.
Vedremo che le operazioni elementari possono essere molto utili per il calcolo del Determinante e della Caratteristica di una matrice.

Le operazioni elementari possono ottenersi anche moltiplicando la matrice data $\mathbb{A}$ per una opportuna matrice $\mathbb{E}$, detta matrice elementare.
Il prodotto $\mathbb{A} \cdot \mathbb{E}$ coincide con le operazioni elementari sulle colonne, il prodotto $\mathbb{E} \cdot \mathbb{A}$ con le operazioni elementari sulle righe.

Esempio 39 : Se $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$, presa la matrice di permutazione $\mathbb{E} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, risulta: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 9 \end{Vmatrix}$, ovvero si sono scambiate la prima con la seconda colonna; risulta $\begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$, ovvero si sono scambiate la prima con la seconda riga.

Esempio 40 : Se $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$, presa la matrice $\mathbb{E} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, risulta: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, ovvero si è sostituito la prima colonna con la somma della prima con la terza colonna, la seconda colonna con la differenza tra la seconda e la prima colonna, la terza colonna con la differenza tra la terza e la seconda colonna; risulta $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 8 & 10 & 12 \end{Vmatrix}$, ovvero si è sostituito la prima riga con la differenza tra la prima e la seconda riga, la seconda riga con la differenza tra la seconda e la terza riga, la terza riga con la somma della terza con la prima riga.

Esempio 41 : Se $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$, presa la matrice $\mathbb{E} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, risulta:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 9 & 12 & 15 \\ -10 & -11 & -12 \\ 8 & 10 & 12 \end{Vmatrix}$$, ovvero si è sostituito la prima riga con la somma della prima con il doppio della seconda riga, la seconda riga con la differenza tra la seconda ed il doppio della terza riga, la terza riga con la somma della terza con la prima riga.

IL DETERMINANTE

Consideriamo ora esclusivamente matrici quadrate $\mathbb{A}_n$. Seguendo anzitutto la forma tradizionale, diamo la

Definizione 31 : Si definisce **Determinante** della matrice $\mathbb{A}_n$, e si indica con $\det(\mathbb{A})$, o $|\mathbb{A}|$, la somma degli $n\,!$ prodotti contenenti ciascuno un solo elemento per ogni riga e per ogni colonna di $\mathbb{A}$; ciascuno di questi prodotti viene preso con il proprio segno o con il segno cambiato a seconda che la permutazione dei primi indici degli elementi del prodotto sia o no della stessa classe di quella dei secondi.

Per illustrare quanto detto, consideriamo la matrice $\mathbb{A}_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$.

Tutti i possibili prodotti di tre elementi non su di una stessa riga o colonna sono i seguenti:
1) $a_{11}\, a_{22}\, a_{33}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $1, 2, 3$;
2) $a_{11}\, a_{23}\, a_{32}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $1, 3, 2$;
3) $a_{12}\, a_{23}\, a_{31}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $2, 3, 1$;
4) $a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $2, 1, 3$;
5) $a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $3, 1, 2$;
6) $a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$; primi indici $1, 2, 3$; secondi indici $3, 2, 1$.

Sia $1, 2, ..., n$ la permutazione fondamentale; il gruppo dei primi e quello dei secondi indici degli elementi di un prodotto formeranno ciascuno una permutazione dei primi n numeri naturali che va ricondotta alla fondamentale scambiando tra loro, una coppia alla volta, elementi contigui. Se occorrono un numero pari di scambi, la permutazione è detta di classe pari, altrimenti di classe dispari.

Nei sei prodotti che abbiamo formato, il gruppo dei primi indici è sempre $1, 2, 3$, quindi occorrono 0 (numero pari) scambi per portarlo alla permutazione fondamentale.

Consideriamo ora i secondi indici. Nei prodotti 1), 3) e 5) occorrono rispettivamente 0, 2 e 2 scambi, ovvero un numero pari come lo 0; questi prodotti verranno presi con il loro proprio segno; nei prodotti 2), 4) e 6) occorrono invece 1, 1 e 3 scambi, ovvero un numero dispari, e questi prodotti dovranno quindi essere cambiati di segno.

Il determinante di $\mathbb{A}$ sarà allora dato da:

$|\mathbb{A}| = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$.

Dovremmo a questo punto elencare tutte le proprietà che discendono da questa definizione di determinante. Possiamo ottenere più rapidamente tali risultati ricorrendo ad una definizione più moderna di Determinante, che è la seguente:

Definizione 32 (**assiomatica del Determinante**) : Il Determinante $|\mathbb{A}|$ di una matrice $\mathbb{A}_n$ è una funzione multilineare ed alternante delle righe e/o delle colonne (cioè delle linee) della matrice, che ad $\mathbb{A}_n$ associa un numero reale, e tale che $\det(\mathbb{I}_n) = 1$.

Scriveremo quindi: $|\mathbb{A}| = f(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, ..., \mathrm{R}_n) = f(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, ..., \mathrm{C}_n)$.

Vediamo più in dettaglio quest'ultima definizione.

Essere la funzione $f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{L}_n)$ **multilineare** significa che:

$f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{L}_{k-1}, \alpha\,\mathbb{X} + \beta\,\mathbb{Y}, \mathbb{L}_{k+1}, ..., \mathbb{L}_n) =$
$= \alpha\, f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{L}_{k-1}, \mathbb{X}, \mathbb{L}_{k+1}, ..., \mathbb{L}_n) + \beta\, f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{L}_{k-1}, \mathbb{Y}, \mathbb{L}_{k+1}, ..., \mathbb{L}_n)\,,$
ovvero l'immagine di una combinazione lineare è uguale alla combinazione lineare delle immagini.
L'essere la funzione **alternante** significa che:
$f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{X}, ..., \mathbb{Y}, ..., \mathbb{L}_n) = -\, f(\mathbb{L}_1, ..., \mathbb{Y}, ..., \mathbb{X}, ..., \mathbb{L}_n)\,,$
cioè scambiando tra di loro due variabili il valore della funzione cambia di segno.

Questa seconda definizione ci permette di elencare più rapidamente le principali proprietà del Determinante:
P1) - Il Determinante cambia di segno scambiando tra loro due linee della matrice (proprietà di alternanza).

Esempio 42 : $|\mathbb{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$.

P2)- Il Determinante di una matrice $\mathbb{A}_n$ coincide con quello della sua Trasposta $\mathbb{A}_n^{\mathrm{T}}$.

Esempio 43 : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$.

E' di fondamentale importanza la seguente:
P3) - Il Determinante di una matrice è nullo se e solo se le righe (e quindi le colonne) sono vettori linearmente dipendenti.
Una matrice il cui Determinante sia diverso da zero è detta **matrice non singolare,** altrimenti, nel caso $|\mathbb{A}| = 0$, è detta **singolare**.

Discendono dalla P3) altre proprietà:
P4) - Se gli elementi di una linea della matrice sono tutti nulli, il Determinante è nullo.
P5) - Se due linee sono proporzionali (cioè gli elementi di una sono multipli, per uno stesso scalare, degli elementi dell'altra), il Determinante è nullo.

Esempio 44 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 3 & 3\cdot 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$

P6) - Se si moltiplicano tutti gli elementi di una linea della matrice $\mathbb{A}$ per uno scalare k, il Determinante di questa nuova matrice è uguale al Determinante di $\mathbb{A}$ moltiplicato per k.

Esempio 45 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3\cdot 1 & 3\cdot 2 & 3\cdot 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

P7) - Se una linea $\mathbb{L}$ di una matrice $\mathbb{A}$ viene espressa come somma di due o più linee, il Determinante di $\mathbb{A}$ è uguale alla somma dei Determinanti di altrettante matrici, ciascuna avente le stesse linee di $\mathbb{A}$, eccettuata la linea $\mathbb{L}$, al posto della quale si trovano, uno per volta, i vari addendi di $\mathbb{L}$ (proprietà di multilinearità).

Esempio 46 : $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2+5 & 1+3 & 0+3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

P8) - Il valore del Determinante di una matrice non cambia se ad una linea si sostituisce una qualunque combinazione lineare di questa linea con altre linee della matrice.
Questa proprietà è molto importante dal punto di vista del calcolo pratico del determinante, in quanto, applicandola opportunamente, permette di generare linee che contengano il maggior numero possibile di elementi nulli, riducendo di molto i calcoli necessari per trovare il valore del Determinante.

Esempio 47 : Se sommiamo alla prima riga la seconda moltiplicata per 4 e le sottraiamo la terza moltiplicata per 3 $(\mathrm{R}_1 \leftarrow \mathrm{R}_1 + 4\,\mathrm{R}_2 - 3\,\mathrm{R}_3)$, avremo:
$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3+4\cdot 0-3\cdot 1 & 1+4\cdot 2-3\cdot 1 & 2+4\cdot 1-3\cdot 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$,
ovvero non cambia il valore del Determinante.

Esempio 48 : Dati i tre vettori $\mathbb{X} = (1,2,4)$, $\mathbb{Y} = (-1,1,-1)$ e $\mathbb{Z} = (1,5,7)$, determiniamo se essi sono linearmente indipendenti o dipendenti. Usiamo la proprietà P3) e costruiamo la matrice $\mathbb{A}_3$ avente $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$ come righe. Otteniamo, sommando alla seconda riga la terza e sottraendo alla terza la prima ($\mathrm{R}_2 \leftarrow \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_3$ e $\mathrm{R}_3 \leftarrow \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1$):
$|\mathbb{A}_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, in quanto la seconda e la terza riga risultano proporzionali. Quindi i tre vettori sono linearmente dipendenti.

TEOREMI DI LAPLACE
Il calcolo del valore di un Determinante viene effettuato praticamente non usando la definizione, ma mediante il cosiddetto I° Teorema di Laplace, per enunciare il quale occorre premettere alcune definizioni.
Definizione 33 : Data una matrice quadrata $\mathbb{A}_n$, chiamasi **Minore complementare** di un elemento a_{ij} di $\mathbb{A}_n$ il Determinante della sottomatrice quadrata ottenuta eliminando da $\mathbb{A}_n$ la riga e la colonna a cui appartiene l'elemento a_{ij}.
Definizione 34 : Si dice **Complemento algebrico** di un elemento a_{ij} di $\mathbb{A}_n$, e si indica con A_{ij}, il valore del suo Minore complementare preso con il suo segno, se la somma degli indici $i+j$ è pari, o con il segno cambiato, se $i+j$ è dispari.

Si può dimostrare che vale il seguente:
Teorema (I° Teorema di Laplace): Il valore del Determinante di una qualunque matrice quadrata si ottiene mediante la somma dei prodotti degli elementi di una qualunque linea della matrice per i rispettivi Complementi algebrici.

Ad esempio, se calcoliamo il Determinante mediante la i-esima riga, scriveremo:
$$|\mathbb{A}_n| = \det(\mathbb{A}_n) = a_{i1}\,\mathrm{A}_{i1} + a_{i2}\,\mathrm{A}_{i2} + ... + a_{ik}\,\mathrm{A}_{ik} + ... + a_{in}\,\mathrm{A}_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\mathrm{A}_{ik}\,.$$

Il Teorema di Laplace consente quindi di calcolare il Determinante di una qualunque matrice quadrata di ordine n mediante il calcolo di n Determinanti di matrici di ordine $n-1$, che saranno ciascuno calcolato mediante $n-1$ Determinanti di ordine $n-2$ e così fino ad avere Determinanti di matrici di ordine 2.

Cominciamo calcolando il Determinante delle matrici degli ordini più bassi.
Per una matrice $(1 \cdot 1)$, essendo $\mathbb{A}_{1,1} = a_{1,1}$, si ha che $|\mathbb{A}_{1,1}| = a_{1,1}$.
Vediamo poi come calcolare i Determinanti di matrici di ordine 2.
Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}$, si ha: $\det(\mathbb{A}) = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}$.
Consideriamo ora la matrice del terzo ordine $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$.
Sviluppando il Determinante, ad esempio, per gli elementi della prima riga, avremo:
$|\mathbb{A}| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, da cui otteniamo:
$|\mathbb{A}| = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) - a_{12}\,(a_{21}\,a_{33} - a_{23}\,a_{31}) + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) =$
$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$.

Esempio 49 : Calcoliamo il Determinante della matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{Vmatrix}$. Mediante la Regola di Laplace, applicata alla prima riga, avremo:
$|\mathbb{A}| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$
$= (45-48) - 2\,(36-42) + 3\,(32-35) = -3 + 12 - 9 = 0$.
Calcoliamolo ora usando la proprietà P8).
Usiamo le operazioni elementari sulle linee, e sostituiamo alla seconda riga se stessa meno la prima riga moltiplicata per 4: $R_2 \leftarrow R_2 - 4\,R_1$, e sostituiamo alla terza riga se stessa meno la prima moltiplicata per 7: $R_3 \leftarrow R_3 - 7\,R_1$ ed avremo:
$$|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 \\ 7-7 & 8-14 & 9-21 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} .$$
Sviluppiamo con la Regola di Laplace applicata ovviamente alla prima colonna ed avremo:
$$|\mathbb{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0 .$$
Anche senza fare calcoli si vedeva che quest'ultimo Determinante è nullo: la terza riga è infatti il doppio della seconda, e per la proprietà P5) segue $|\mathbb{A}| = 0$.
Essendo nullo il Determinante, le tre righe (e le tre colonne) sono linearmente dipendenti. I calcoli fatti ci consentono di trovare anche la combinazione lineare che lega le tre righe.
Da $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 - 4 \cdot R_1 \\ R_3 - 7 \cdot R_1 \end{vmatrix}$ otteniamo:
$R_3 - 7 \cdot R_1 = 2 \cdot (R_2 - 4 \cdot R_1)$ da cui si ricava: $R_3 = 2 \cdot R_2 - R_1$ o $R_1 - 2\,R_2 + R_3 = 0$.

E' facile vedere come il Determinante di una matrice diagonale sia dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale. Il prodotto degli elementi della diagonale principale esprime anche il valore del Determinante di una matrice triangolare, alta o bassa che sia.
Il Determinante della matrice unità è uguale ad 1, qualunque sia l'ordine della matrice unità.

Esempio 50 : Calcoliamo il valore del Determinante delle matrici:

$$\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ e } \mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{Vmatrix} .$$

Con opportuni scambi tra le righe, la matrice $\mathbb{A}$ può essere portata alla forma della matrice diagonale $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{Vmatrix} \text{, il cui Determinante è allora uguale a } 6\,! = 720 \ .$$

Dato che occorrono 8 scambi di righe per portare $\mathbb{A}$ in $\mathbb{D}$, avremo che $|\mathbb{A}| = |\mathbb{D}|$.
Operando come in precedenza, scambiando tra loro le colonne, anche la matrice $\mathbb{B}$ può essere portata alla forma della matrice diagonale $\mathbb{D}$ dell'esempio precedente.
Occorrendo per questo 15 scambi di colonne, avremo che $|\mathbb{B}| = -|\mathbb{D}| = -6\,! = -720$.

Esempio 51 : Dati i vettori $\mathbb{X} = \left(2, k, e^h\right)$, $\mathbb{Y} = (1, 1, 0)$ e $\mathbb{Z} = \left(2, e^h, k\right)$, determiniamo l'insieme delle coppie (h, k) che li rendono linearmente dipendenti.
Formiamo la matrice $\mathbb{A}_3$ avente come righe i tre vettori dati, ed imponiamo che il suo Determinante sia nullo. Avremo, sviluppando per la II^ riga:

$$|\mathbb{A}_3| = \begin{vmatrix} 2 & k & e^h \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & e^h & k \end{vmatrix} = -1 \cdot \left(k^2 - e^{2h}\right) + 1 \cdot \left(2k - 2e^h\right) = e^{2h} - 2e^h - \left(k^2 - 2k\right) = 0 .$$

Considerandola come un'equazione di secondo grado nell'incognita e^h, questa è verificata per $e^h = 1 \pm \sqrt{1 - 2k + k^2} = 1 \pm (1 - k)$, ovvero per $k = e^h$ e per $k = 2 - e^h$.

IL TEOREMA DI BINET
Il calcolo del Determinante non è permutabile con le operazioni di somma e differenza. In generale, il Determinante della matrice somma di due matrici non coincide con la somma dei Determinanti delle due matrici. Per quanto riguarda il prodotto vale invece il:
Teorema (di Binet): Date due matrici $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{B}_n$ dello stesso ordine, considerata la matrice $\mathbb{C}_n$ risultante dal loro prodotto, risulta: $\det(\mathbb{C}_n) = \det(\mathbb{A}_n) \cdot \det(\mathbb{B}_n)$.

Esempio 52 : Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 8 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, verifichiamo la validità del Teorema di Binet. Avremo, sviluppando il Determinante di $\mathbb{A}$ per la II^ riga:

$|\mathbb{A}| = -2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-8-1) - 4 \cdot (1+4) = -2$, e

$|\mathbb{B}| = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (1-2) = 3$, avendo sviluppato quest'ultimo per la II^ colonna.

Calcoliamo ora la matrice prodotto $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$. Avremo:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1\cdot 1 - 1\cdot 1 + 1\cdot 1 & 1\cdot 3 - 1\cdot 0 + 1\cdot 0 & 1\cdot 2 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 1 + 4\cdot 1 & 2\cdot 3 + 0\cdot 0 + 4\cdot 0 & 2\cdot 2 + 0\cdot 2 + 4\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 1 + 8\cdot 1 & 4\cdot 3 + 1\cdot 0 + 8\cdot 0 & 4\cdot 2 + 1\cdot 2 + 8\cdot 1 \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 8 \\ 13 & 12 & 18 \end{Vmatrix}, \text{ da cui } |\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 9 & 0 & 14 \end{vmatrix} = -3 \cdot (56 - 54) = -6 .$$

Per calcolare più rapidamente il Determinante di $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ si è sostituito alla seconda riga la seconda riga meno il doppio della prima ed alla terza riga la terza riga meno la prima moltiplicata per 4. Dato che $|\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{B}| = -6$, l'uguaglianza è quindi verificata.

Se calcoliamo poi $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$, avremo che $|\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}| = -6$, anche se $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} \neq \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$.

Si può poi dimostrare che vale anche il seguente:

Teorema (II° Teorema di Laplace): La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) di una matrice per i Complementi algebrici degli elementi di un'altra riga (o colonna) è sempre uguale a zero.

LA CARATTERISTICA

Consideriamo ora matrici qualunque, sia rettangolari che quadrate, e diamo la seguente, importante:

Definizione 35 : Si dice **Caratteristica** (o Rango) di una matrice l'ordine massimo dei suoi minori non nulli.

Indicheremo la Caratteristica della matrice $\mathbb{A}$ con $\mathrm{Car}(\mathbb{A})$.

Quindi la Caratteristica di una matrice è data dall'ordine della più grossa sottomatrice quadrata non singolare estraibile dalla matrice data.

Alla luce della proprietà P3) del Determinante, possiamo dire anche che la Caratteristica esprime il massimo numero di righe (e quindi di colonne) tra loro linearmente indipendenti, contenute nella matrice. E' facile vedere come solo la matrice nulla, ovvero la matrice avente tutti gli elementi uguali a zero, abbia Caratteristica zero, così come una matrice quadrata non singolare ha Caratteristica uguale al suo ordine.

Esempio 53 : Data la matrice $\mathbb{A}_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$, si ha che $|\mathbb{A}| = 0$.

La sua Caratteristica non può allora essere uguale a 4, in quanto le sue 4 righe (e le sue 4 colonne) sono linearmente dipendenti. Consideriamo allora la sottomatrice $\mathbb{B}$ data dagli elementi che stanno sulla 1^, 2^ e 4^ riga e sulla 1^, 2^ e 3^ colonna: $\mathbb{B}_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Essendo $|\mathbb{B}| = 18$, abbiamo trovato un minore non nullo del 3^ ordine, e quindi $\mathrm{Car}(\mathbb{A}) = 3$.

Si può trovare la Caratteristica anche usando le operazioni elementari sulle righe, che non alterano i Determinanti dei minori e quindi la Caratteristica della matrice.

Operiamo anzitutto le seguenti: $R_3 \leftarrow R_3 - 4\,R_1$ e $R_4 \leftarrow R_4 - 3\,R_1$ ed otteniamo:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 6 & -8 \\ 0 & -7 & 4 & -7 \end{matrix}\right\|.$$

In questa matrice, operiamo poi le: $R_3 \leftarrow R_3 + 6\,R_2$ e $R_4 \leftarrow R_4 + 7\,R_2$ ed avremo:

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 18 & -14 \\ 0 & 0 & 18 & -14 \end{matrix}\right\|.$$

Come si vede, terza e quarta riga sono uguali, quindi la Caratteristica non può essere 4.

Dato che $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 18 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$, la Caratteristica di $\mathbb{A}_4$ è uguale a 3.

Esempio 54 : Calcoliamo la Caratteristica delle seguenti matrici:

$$\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{matrix}\right\|;\ \mathbb{B} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 7 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \end{matrix}\right\|;$$

$$\mathbb{C} = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & -4 & -2 \end{matrix}\right\|.$$

La Caratteristica di $\mathbb{A}$ è 3, infatti : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,;$

$\mathrm{Car}(\mathbb{B}) = 3$, in quanto $|\mathbb{B}| = 0$ mentre $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 7 & 4 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12 \neq 0\,;$

$\mathrm{Car}(\mathbb{C})) = 2$, in quanto tutti i minori di ordine 3 sono nulli mentre $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0\,.$

Esempio 55 : Determinare, al variare di m e k, la Caratteristica della matrice:

$$\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 1 & m & k \\ 2 & k & m \\ 3 & k+m & k+m \end{matrix}\right\|.$$

La terza riga della matrice è somma delle prime due, quindi $|\mathbb{A}| = 0$ e la Caratteristica non potrà in nessun caso essere pari a 3.

Consideriamo allora solo le prime due righe: $\left\|\begin{matrix} 1 & m & k \\ 2 & k & m \end{matrix}\right\|$.

La Caratteristica della matrice $\mathbb{A}$ sarà 2 quando:

$\begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & k \end{vmatrix} = k - 2m \neq 0$, ovvero per $k \neq 2m$, oppure se

$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 2k \neq 0$, ovvero per $m \neq 2k$, oppure, infine, se

$\begin{vmatrix} m & k \\ k & m \end{vmatrix} = m^2 - k^2 \neq 0$, cioè per $m \neq \pm k$.

Perchè non si avveri nessuna di queste tre possibilità dovrà essere $k = m = 0$, ed in questo caso sarà $\mathrm{Car}(\mathbb{A}) = 1$, in quanto nella prima colonna ci sono elementi non nulli.

Esempio 56 : Determiniamo, al variare di m e k, mediante operazioni elementari sulle righe, la Caratteristica della matrice: $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & k \\ 1 & 3 & k & m & 0 \end{matrix} \right\|$.

Iniziamo con le seguenti: $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$ e $R_3 \leftarrow R_3 - R_1$ ed avremo:

$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -5 & k-3 \\ 0 & 4 & k & m-2 & -1 \end{matrix} \right\|$. Operiamo poi la $R_3 \leftarrow R_3 - R_2$ ed avremo:

$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -5 & k-3 \\ 0 & 0 & k-2 & m+3 & 2-k \end{matrix} \right\|$. Come si vede, abbiamo operato per ottenere, mediante le prime due colonne, una matrice triangolare, nella quale potremo mettere, per terza colonna, o la terza o la quarta o la quinta colonna della matrice data. Di queste possibili matrici triangolari d'ordine 3 è immediato trovare il Determinante. Quindi avremo che:

$\mathrm{Car}(\mathbb{A}) = 3$ se $k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$ oppure se $m + 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq -3$.

Se $k = 2$ e contemporaneamente $m = -3$ otteniamo:

$\left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$, ed allora $\mathrm{Car}(\mathbb{A}) = 2$ in quanto le righe si riducono a due ed inoltre $\left| \begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{matrix} \right| = 4 \neq 0$, ovvero esiste un Minore non nullo di ordine 2.

Senza dimostrarli, ci limitiamo ad enunciare i seguenti:

Teorema 8 : $\mathbb{A}$ e la trasposta $\mathbb{A}^T$ hanno la stessa caratteristica: $\mathrm{Car}(\mathbb{A}) = \mathrm{Car}(\mathbb{A}^T)$.

Teorema 9 : La Caratteristica della matrice prodotto è minore o uguale della Caratteristica di ciascuna delle due matrici fattori : $\mathrm{Car}(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) \leq \min\{\mathrm{Car}(\mathbb{A}); \mathrm{Car}(\mathbb{B})\}$.

Esempio 57 : Prese le matrici $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ e $\mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\|$, eseguiti i prodotti $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$ e $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} -11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{matrix} \right\|$, vediamo che la Caratteristica di $\mathbb{A}$ è 2, quella di $\mathbb{B}$ è 1, quella di $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ è 0, quella di $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ è 1.

La Caratteristica di $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ ci fa vedere come la Caratteristica della matrice prodotto possa anche essere inferiore alla minima Caratteristica tra quelle delle matrici fattori.

Esempio 58 : Date le matrici $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 1 & x \\ x & 1 \end{matrix} \right\|$ e $\mathbb{B} = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\|$, determiniamo se esistono valori di x per cui la matrice prodotto $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ abbia Caratteristica 2.

Dato che la Caratteristica di un prodotto è minore o uguale a quella delle due matrici fattori, dovrà essere anzitutto $1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$, affinchè la matrice $\mathbb{A}$ abbia Caratteristica pari a 2, come quella della matrice $\mathbb{B}$, anche se questo non è comunque sufficiente ad assicurare che la Caratteristica di $\mathbb{C}$ sia 2. Eseguendo il prodotto, avremo poi che:

$\mathbb{C} = \left\| \begin{matrix} 1+x & 2+2x & 3+2x \\ 1+x & 2+2x & 3x+2 \end{matrix} \right\|$. Perchè la Caratteristica di $\mathbb{C}$ sia 2 dovrà essere:

$(1+x)(2+3x) - (1+x)(3+2x) = (1+x)(x-1) \neq 0$, ovvero $x \neq \pm 1$,

in quanto, come facilmente si vede, la 1^ e la 2^ colonna di $\mathbb{C}$ sono proporzionali.

Se si usa il prodotto di Kronecker vale invece il seguente:
Teorema 10 : Se $\text{Car}(\mathbb{A}) = n$ e $\text{Car}(\mathbb{B}) = m$, allora $\text{Car}(\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}) = n \cdot m$.

MATRICE INVERSA
Data una matrice quadrata $\mathbb{A}_n$, ci chiediamo se sia possibile determinare una matrice quadrata, che indicheremo con $\mathbb{A}_n^{-1}$, tale che: $\mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{A}_n = \mathbb{A}_n \cdot \mathbb{A}_n^{-1} = \mathbb{I}_n$, ovvero tale che il prodotto, sia da destra che da sinistra, di questa matrice con la matrice $\mathbb{A}$ dia per risultato la matrice unità. Se una tale matrice esiste, essa sarà chiamata **matrice Inversa** di $\mathbb{A}$.

Vediamo subito una importante proprietà. Vale infatti il
Teorema 11 : Se una matrice quadrata $\mathbb{A}_n$ ammette inversa $\mathbb{A}_n^{-1}$, questa è unica.
Dimostrazione: Se esistessero due diverse matrici inverse $\mathbb{A}^{-1}$ e $\mathbb{B}^{-1}$, seguendo la definizione, avremmo: $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$ ed anche $\mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{I}$.
Considerando il prodotto $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^{-1}$, ed applicando la proprietà associativa, otteniamo:
$\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A}\right) \cdot \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{I} \cdot \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{B}^{-1}$ ed anche
$\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^{-1} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \left(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}^{-1}\right) = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{I} = \mathbb{A}^{-1}$, ovvero $\mathbb{B}^{-1} = \mathbb{A}^{-1}$. ●

E' bene dire che il problema dell'esistenza, dell'unicità e della determinazione della matrice inversa è un problema molto più generale, studiato anche per le matrici rettangolari mediante la cosiddetta Inversa di Moore-Penrose, anche se in questo caso non vale il risultato che si trova per le matrici quadrate. Qui ci limitiamo a trattare solo il caso dell'inversa di una matrice quadrata e non singolare.

Vediamo ora come costruire, una volta accertato che esista, l'inversa di una matrice quadrata non singolare.
Definizione 36 : Dicesi **Aggiunta** di una matrice $\mathbb{A}_n$, indicata con $\mathbb{A}_n^*$, la matrice ottenuta sostituendo agli elementi di $\mathbb{A}_n$ i loro Complementi algebrici.
Vale il seguente:
Teorema 12 : L'Inversa di una matrice $\mathbb{A}_n$ quadrata non singolare è data dalla Trasposta dell'Aggiunta, divisa per il Determinante di $\mathbb{A}$, ovvero:
$$\mathbb{A}_n^{-1} = \frac{1}{|\mathbb{A}|} \cdot \left(\mathbb{A}_n^*\right)^{\mathrm{T}}.$$
Una volta calcolata la matrice Aggiunta $\mathbb{A}_n^*$ di $\mathbb{A}_n$, se ne deve fare la Trasposta, e poi dividere tutti i suoi elementi per il numero reale $|\mathbb{A}|$.
Indicato con $\mathbf{A}_{ij}$ il Complemento algebrico dell'elemento a_{ij}, potremo anche scrivere:
$$\mathbb{A}_n^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{21}}{|\mathbb{A}|} & ... & \frac{\mathrm{A}_{n1}}{|\mathbb{A}|} \\ \frac{\mathrm{A}_{12}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{22}}{|\mathbb{A}|} & ... & \frac{\mathrm{A}_{n2}}{|\mathbb{A}|} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\mathrm{A}_{1i}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{2i}}{|\mathbb{A}|} & ... & \frac{\mathrm{A}_{ni}}{|\mathbb{A}|} \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\mathrm{A}_{1n}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{2n}}{|\mathbb{A}|} & ... & \frac{\mathrm{A}_{nn}}{|\mathbb{A}|} \end{matrix} \right\|.$$

Dimostrazione: Consideriamo il prodotto $\mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{A}_n = \mathbb{B}_n$.

Il generico elemento b_{ij} della matrice risultato $\mathbb{B}_n$ sarà dato dal prodotto della i-esima riga di $\mathbb{A}_n^{-1}$ per la j-esima colonna di $\mathbb{A}_n$, ovvero:

$$b_{ij} = \frac{\mathrm{A}_{1i}}{|\mathbb{A}|}\, a_{1j} + \frac{\mathrm{A}_{2i}}{|\mathbb{A}|}\, a_{2j} + ... + \frac{\mathrm{A}_{ni}}{|\mathbb{A}|}\, a_{nj} = \frac{1}{|\mathbb{A}|}\,[\, \mathrm{A}_{1i}\, a_{1j} \;+\; \mathrm{A}_{2i}\, a_{2j} \;+ ... +\; \mathrm{A}_{ni}\, a_{nj}\,]\,.$$

Se $i = j$, il termine dentro parentesi è lo sviluppo del Determinante di $\mathbb{A}$ mediante la j-esima colonna, e quindi vale 1, mentre se $i \neq j$, per il II° Teorema di Laplace, esso vale zero.
Analoghe considerazioni per il prodotto $\mathbb{A}_n \cdot \mathbb{A}_n^{-1}$, da cui segue che $\mathbb{B}_n = \mathbb{I}_n$. ●

Esempio 59 : Calcoliamo l'inversa della matrice $\mathbb{A}_{33} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$.

Sarà $\mathbb{A}^* = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{Vmatrix}$. Avremo poi $(\mathbb{A}^*)^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$,

e dato che $\det(\mathbb{A}) = 2$, avremo infine: $\mathbb{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$.

Eseguendo i prodotti si può quindi vedere sia che:

$$\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix} = \mathbb{I}_3 \text{ che}$$

$$\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{Vmatrix} = \mathbb{I}_3\,.$$

Per la matrice inversa, infine, valgono le seguenti proprietà:
I1) $\left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbb{A}$ (l'inversa dell'inversa è la matrice di partenza);
I2) $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{A}^{-1}$:
infatti $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{-1} \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \mathbb{B}^{-1} \cdot \left(\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A}\right) \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B}^{-1} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{I}$;
I3) $\left|\mathbb{A}^{-1}\right| = \dfrac{1}{|\mathbb{A}|}$:
infatti, per il Teorema di Binet, sarà $\left|\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A}\right| = \left|\mathbb{A}^{-1}\right| \cdot |\mathbb{A}| = |\mathbb{I}| = 1$ da cui la tesi;
I4) $\left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, ovvero l'inversa della trasposta coincide con la trasposta dell'inversa:
infatti: da $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$ segue $\left(\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{I}^{\mathrm{T}}$, ovvero $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{I}$.
Ma $\mathbb{I} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$ e quindi la tesi;
I5) L'inversa di una matrice diagonale è ancora una matrice diagonale, avente per elemento b_{ii} il reciproco dell'elemento a_{ii}: $b_{ii} = \dfrac{1}{a_{ii}}$;
I6) L'inversa di una matrice simmetrica è una matrice simmetrica:
infatti, da $\mathbb{A} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ segue $\mathbb{A}^{-1} = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$, ma, per la proprietà I4) si ha $\mathbb{A}^{-1} = \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$, ovvero la tesi.

Esempio 60 : Consideriamo la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}$. Risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}^2 = \mathbb{I}$:

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}^2=\begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 3 & 8 \\ -1 & -3 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}=\mathbb{I}$$
e quindi, dato che $|\mathbb{A}|=-1\neq 0$, otteniamo $\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{I}$ ovvero $\mathbb{A}=\mathbb{A}^{-1}$.

Nel caso del prodotto di Kronecker per l'inversa vale, diversamente dal prodotto righe per colonne, la seguente proprietà: supponendo $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ invertibili, risulta $(\mathbb{A}\otimes\mathbb{B})^{-1}=\mathbb{A}^{-1}\otimes\mathbb{B}^{-1}$.

Per la determinazione della matrice inversa si può anche seguire un'altra procedura, basata sulle operazioni elementari. Scriviamo, una accanto all'altra, la matrice data e la matrice unità, a formare un'unica matrice. Mediante operazioni elementari sulle righe, portiamo la matrice originaria $\mathbb{A}$ a divenire la matrice unità: la matrice di destra sarà allora $\mathbb{A}^{-1}$.

Esempio 61 : Calcoliamo l'inversa della matrice $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ usando le operazioni elementari sulle righe. Partiamo da $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert=[\mathbb{A}\,|\,\mathbb{I}]$.

Iniziamo operando la $R_2\leftarrow R_2-R_1$ e la $R_3\leftarrow R_3-R_1$; avremo: $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert$.

Operiamo ora la $R_2\leftarrow\frac{1}{2}R_2$ ed otteniamo: $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right\Vert$.

Operiamo ora la $R_3\leftarrow R_3-R_2$ ed otteniamo: $\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right\Vert$.

Operiamo infine la $R_2\leftarrow R_2-R_3$ e la $R_1\leftarrow R_1+R_3$ ed avremo:
$\left\Vert\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right\Vert=\left[\mathbb{I}\,|\,\mathbb{A}^{-1}\right]$. Dato che la matrice di sinistra è la matrice unità, quella di destra è la matrice $\mathbb{A}^{-1}$. Quindi $\mathbb{A}^{-1}=\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{Vmatrix}$.

Concludiamo con il
Teorema 13 : L'unica matrice $\mathbb{A}_n$ idempotente e non singolare è la matrice unità $\mathbb{I}_n$.
Dimostrazione: Da $\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}$, se $\mathbb{A}$ fosse non singolare, moltiplicando a sinistra per l'inversa avremmo: $\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}$ ovvero $\left(\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}\right)\cdot\mathbb{A}=\mathbb{I}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{A}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{A}=\mathbb{I}$ ovvero $\mathbb{A}=\mathbb{I}$.
Quindi una matrice diversa dalla matrice unità per essere idempotente deve essere singolare.

APPLICAZIONI LINEARI E SISTEMI LINEARI
Due tra le più importanti applicazioni del calcolo matriciale sono costituite dalle cosiddette applicazioni lineari e dalla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari.
Consideriamo una matrice $\mathbb{A}_{m,n}$, e sia $\mathbb{X}\in\mathbb{R}^n$ un vettore colonna: $\mathbb{X}=\mathbb{X}_{n,1}$. Il prodotto righe per colonne $\mathbb{A}_{m,n}\cdot\mathbb{X}_{n,1}$ dà per risultato un vettore colonna $\mathbb{Y}_{m,1}\in\mathbb{R}^m$, ovvero:

$\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$.
Se consideriamo il vettore $\mathbb{X}$ come una variabile indipendente, mediante il prodotto tra la matrice $\mathbb{A}$ ed il vettore colonna $\mathbb{X}$ si può costruire una funzione (o applicazione) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ che associa ad ogni vettore $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ uno ed un solo vettore $\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^m$, con $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$.
Una funzione $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ esprimibile in questa forma verrà detta **applicazione lineare**.
Viceversa, se consideriamo $\mathbb{Y}$ come un vettore assegnato, possiamo chiederci se e quanti vettori $\mathbb{X}$ esistono che soddisfano l'equazione $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.
Risolvere quest'ultimo problema è ciò che viene detto risolvere un **sistema lineare**.

APPLICAZIONI LINEARI

Definizione 37 : Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è detta un'**applicazione lineare** se:
1) $f(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = f(\mathbb{X}_1) + f(\mathbb{X}_2)$ e
2) $f(k \cdot \mathbb{X}) = k \cdot f(\mathbb{X}), \forall\, k \in \mathbb{R}$
ovvero se
$f(k_1\, \mathbb{X}_1 + k_2\, \mathbb{X}_2) = k_1\, f(\mathbb{X}_1) + k_2\, f(\mathbb{X}_2)$.
Quindi una applicazione viene detta lineare se l'immagine di una qualunque combinazione lineare coincide con la combinazione lineare delle immagini.

Se esprimiamo $\mathbb{X} = (x_1,\, x_2, ..., x_n)$ mediante i vettori di una base di $\mathbb{R}^n$, ad esempio quella canonica, da $\mathbb{X} = x_1\, \mathbf{e}_1 + x_2\, \mathbf{e}_2 + ... +\, x_n\, \mathbf{e}_n$, otteniamo, per la linearità:
$f(\mathbb{X}) = f(x_1\, \mathbf{e}_1 + x_2\, \mathbf{e}_2 + ... +\, x_n\, \mathbf{e}_n) = x_1\, f(\mathbf{e}_1) + x_2\, f(\mathbf{e}_2) + ... +\, x_n\, f(\mathbf{e}_n)$.
E' quindi sufficiente conoscere l'immagine degli elementi della base scelta per avere l'immagine di un qualunque elemento $\mathbb{X}$.

Esempio 62 : Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, tale che: $\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = (1,1,2) \\ f(\mathbf{e}_2) = (2,0,1) \end{cases}$. Allora avremo:
$f(3,5) = f(3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2) = 3\, f(\mathbf{e}_1) + 5\, f(\mathbf{e}_2) = 3\,(1,1,2) + 5\,(2,0,1) = (13,3,11)$.

Dati $\mathbb{X} = (x_1,\, x_2, ..., x_n)$ e $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$, potremo scrivere anche:
$f(\mathbb{X}) = f(x_1, x_2, .., x_n) = (y_1, y_2, .., y_m) = (f_1(x_1, x_2, .., x_n), ..,\, f_m\,(x_1, x_2, .., x_n)) = \mathbb{Y}$.
Quindi, affinchè un'applicazione sia lineare ognuna delle $f_i\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ dovrà essere una funzione lineare, ovvero della forma $f_i\,(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 +\; ... + a_{in}\, x_n$.
Da questo ne segue che ogni applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ può essere scritta nella forma: $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$, con $\mathbb{A}$ matrice di m righe ed n colonne.
Viceversa, ad ogni matrice $\mathbb{A}_{m,n}$ corrisponde una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.
Infatti, per le proprietà del prodotto tra matrici, è soddisfatta la definizione:
1) $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 + \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2$ ovvero $f(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) = f(\mathbb{X}_1) + f(\mathbb{X}_2)$,
2) $\mathbb{A} \cdot (k\, \mathbb{X}) = k\, \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ ovvero $f(k\, \mathbb{X}) = k\, f(\mathbb{X})$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$
da cui infine
$\mathbb{A} \cdot (k_1 \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2) = k_1 \mathbb{A} \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{A} \mathbb{X}_2 \Rightarrow f(k_1 \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2) = k_1 f(\mathbb{X}_1) + k_2 f(\mathbb{X}_2)$.
Dalla $\mathbb{Y}_{m,1} = \mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1}$ segue subito $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$ ovvero $f(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$ qualunque sia f.

Esempio 63 : Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_3, x_1 +\, x_2 - 3\, x_3)$.
Consistendo solo di combinazioni lineari di (x_1, x_2, x_3), f è un'applicazione lineare, che si può scrivere come: $\left\|\begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix}\right\|$.

APPLICAZIONI LINEARI COME COMBINAZIONI LINEARI
Se indichiamo con $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, ..., \mathrm{C}_n$ le colonne della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$, e se $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, il prodotto $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$ può anche essere visto come una combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$: $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathrm{C}_1 \cdot x_1 + \mathrm{C}_2 \cdot x_2 + ... + \mathrm{C}_n \cdot x_n = \mathbb{Y}_{m,1}$,
e quindi interpretato come la ricerca di un'opportuna combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$ mediante la quale esprimere il vettore $\mathbb{Y}$.

SISTEMI LINEARI
Un sistema lineare di m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ può essere rappresentato per esteso nella forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = y_2 \\ \quad .... \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = y_i \\ \quad .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = y_m \end{cases} .$$

Detta $\mathbb{A}_{m,n}$ la matrice dei coefficienti delle incognite, avente per elementi i coefficienti a_{ij}, detto $\mathbb{X}$ il vettore colonna $(n \cdot 1)$ avente per componenti le incognite $(x_1, x_2, ..., x_n)$, e detto $\mathbb{Y}$ il vettore colonna $(m \cdot 1)$ avente per componenti i termini noti $(y_1, y_2, ..., y_m)$, il sistema lineare può essere espresso mediante il prodotto matriciale $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$, ovvero si può vedere come un'applicazione lineare, con matrice $\mathbb{A}_{m,n}$, operata sul vettore incognito $\mathbb{X}_{n,1}$ che deve dare per immagine il vettore dei termini noti $\mathbb{Y}_{m,1}$; si tratta quindi di determinare l'immagine inversa di $\mathbb{Y}$.

Ma il sistema può anche essere scritto come $\mathrm{C}_1 \cdot x_1 + \mathrm{C}_2 \cdot x_2 + ... + \mathrm{C}_n \cdot x_n = \mathbb{Y}$, ovvero si può intendere la soluzione del sistema come la ricerca di n coefficienti $x_1, x_2, ..., x_n$, che permettano di esprimere il vettore dei termini noti $\mathbb{Y}$ come combinazione lineare delle colonne C_i della matrice $\mathbb{A}_{n,m}$.

Risolvere un sistema lineare vuol dire determinarne tutte le possibili soluzioni, ovvero tutte le n-uple $(x_1, x_2, ..., x_n)$ che soddisfino contemporaneamente le m equazioni date.
Se i termini noti $y_1, ..., y_m$ sono tutti nulli, cioè se il vettore dei termini noti è il vettore $\mathbb{O}$, il sistema lineare è detto **omogeneo**.

SISTEMI A MATRICE QUADRATA-TEOREMA DI CRAMER
Supponiamo che il numero delle equazioni sia uguale a quello delle incognite, ovvero che la matrice $\mathbb{A}$ sia quadrata: $\mathbb{A}_n$.
Se $\mathbb{A}_n$ è non singolare, esiste ed è unica la sua inversa $\mathbb{A}_n^{-1}$ per cui, moltiplicando a sinistra per $\mathbb{A}_n^{-1}$ i due membri dell'equazione $\mathbb{A}_n \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$, avremo:
$\mathbb{A}_n^{-1} \cdot (\mathbb{A}_n \cdot \mathbb{X}) = \left(\mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{A}_n\right) \cdot \mathbb{X} = \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X} = \mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{Y}$,
ovvero si può ottenere la soluzione del sistema moltiplicando a destra l'inversa di $\mathbb{A}$ per il vettore $\mathbb{Y}$ dei termini noti: $\mathbb{X} = \mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{Y}$.
Tutto questo è esplicitato nel seguente:
Teorema 14 (di Cramer) : Un sistema lineare avente un numero di equazioni pari a quello delle incognite, ovvero a matrice quadrata, la cui matrice dei coefficienti delle incognite sia non singolare, ammette una ed una sola soluzione $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Il valore di ciascuna incognita è dato da un quoziente, a denominatore del quale si trova il Determinante della matrice $\mathbb{A}_n$ dei coefficienti delle incognite, ed a numeratore il Determinante della matrice ottenuta so-

stituendo, nella matrice dei coefficienti delle incognite, alla colonna dei coefficienti dell'incognita cercata, il vettore dei termini noti.
Dimostrazione: Abbiamo visto che se $\mathbb{A}_n$ è non singolare, allora $\mathbb{X} = \mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{Y}$; quindi:

$$\left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} \frac{\mathrm{A}_{11}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{21}}{|\mathbb{A}|} & \dots & \frac{\mathrm{A}_{n1}}{|\mathbb{A}|} \\ \frac{\mathrm{A}_{12}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{22}}{|\mathbb{A}|} & \dots & \frac{\mathrm{A}_{n2}}{|\mathbb{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathrm{A}_{1i}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{2i}}{|\mathbb{A}|} & \dots & \frac{\mathrm{A}_{ni}}{|\mathbb{A}|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\mathrm{A}_{1n}}{|\mathbb{A}|} & \frac{\mathrm{A}_{2n}}{|\mathbb{A}|} & \dots & \frac{\mathrm{A}_{nn}}{|\mathbb{A}|} \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_i \\ \dots \\ y_n \end{matrix}\right\|$$

da cui, eseguendo il prodotto tra la i-esima riga della matrice $\mathbb{A}_n^{-1}$ ed il vettore $\mathbb{Y}$, otteniamo:
$$x_i = \frac{(\mathrm{A}_{1i}\, y_1 \ + \ \mathrm{A}_{2i}\, y_2 \ + \dots + \ \mathrm{A}_{ni}\, y_n)}{|\mathbb{A}|} \ .$$
Il numeratore di questa frazione non è altro che lo sviluppo fatto, mediante la colonna i-esima, di un Determinante avente le stesse colonne della matrice $\mathbb{A}$, eccettuata l'i-esima, al posto della quale si trova invece la colonna dei termini noti, per cui avremo anche:

$$x_i = \frac{\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & y_1 & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & y_2 & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni-1} & y_n & a_{ni+1} & & a_{nn} \end{matrix}\right|}{\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i-1} & a_{1i} & a_{1i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i-1} & a_{2i} & a_{2i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{ni-1} & a_{ni} & a_{ni+1} & & a_{nn} \end{matrix}\right|}$$

e cioè la tesi del Teorema di Cramer. ●

Se un sistema con matrice quadrata non singolare ammette una ed una sola soluzione significa che le colonne della matrice sono linearmente indipendenti, quindi costituiscono una base di $\mathbb{R}^n$ ed allora esiste uno ed un solo modo di esprimere un qualunque vettore di termini noti come combinazione lineare di esse.

Esempio 64 : Determiniamo i valori delle variabili x, y e z per i quali risulta:
$$\left\|\begin{matrix} x & 2 & y \\ 3 & 1 & z \\ y & 1 & 4 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 2 \\ x \\ 4 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} z \\ y \\ z \end{matrix}\right\| .$$
Eseguendo il prodotto, otteniamo $\left\|\begin{matrix} 4x+4y \\ 6+x+4z \\ 2y+x+16 \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} z \\ y \\ z \end{matrix}\right\|$, da cui, uguagliando le componenti, otteniamo il sistema $\begin{cases} 4x+4y-z=0 \\ x-y+4z=\ -6 \\ x+2y-z=\ -16 \end{cases}$ di tre equazioni in tre incognite.

Calcoliamo il Determinante della matrice dei coefficienti delle incognite, ed otteniamo:
$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -11 \,.$$
Per il Teorema di Cramer, il sistema ammette una ed una sola soluzione che sarà data da:
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ -6 & -1 & 4 \\ -16 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = \frac{252}{11} \;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 1 & -16 & -1 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{290}{11} \;;$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & -16 \end{vmatrix}}{-11} = -\frac{152}{11} \;.$$

Esempio 65 : Determiniamo i valori di m e k per i quali il sistema:
$$\begin{cases} x + 2y + kz = 1 \\ x + 3y + kz = 2 \\ mx + 4y + kz = 0 \end{cases} \quad \text{ammette una ed una sola soluzione.}$$
Per il Teorema di Cramer, il Determinante della matrice (quadrata) dei coefficienti delle incognite dovrà essere diverso da zero; dovrà quindi risultare:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 1 & 3 & k \\ m & 4 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ m & 4 & k \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & k \\ m & k \end{vmatrix} = k\,(1-m) \neq 0\,,$$
che è soddisfatta quando risulti, contemporaneamente, $m \neq 1$ e $k \neq 0$.

SISTEMI LINEARI OMOGENEI

Essendo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}, \forall\, \mathbb{A}$, segue che un sistema omogeneo ammette sempre almeno la soluzione nulla $\mathbb{X} = \mathbb{O}$.
Se il sistema omogeneo è costituito da n equazioni in altrettante incognite, e se la sua matrice dei coefficienti è non singolare, allora, per il Teorema di Cramer, il sistema ammette una sola soluzione che sarà quindi, per quanto detto, la soluzione nulla $\mathbb{X} = \mathbb{O}$.
Questo significa che, essendo le colonne del sistema vettori linearmente indipendenti, l'unica combinazione lineare di esse che dia per risultato il vettore nullo (cioè il vettore dei termini noti) non può che avere coefficienti (cioè la soluzione del sistema) tutti nulli.
Quindi, affinchè un sistema omogeneo costituito da n equazioni in altrettante incognite abbia invece altre soluzioni oltre a quella nulla, il determinante della matrice dei coefficienti $\mathbb{A}$ dovrà risultare uguale a zero.

Esempio 66 : Dati i tre vettori $\mathbb{X} = (1, 2, 4)$, $\mathbb{Y} = (-1, 1, -1)$ e $\mathbb{Z} = (1, 5, 7)$, verificato che risultano essere linearmente dipendenti, determiniamo i coefficienti della loro combinazione lineare che dà per risultato il vettore nullo.
Risulta, operando la $\mathrm{R}_2 \leftarrow \mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1$ e la $\mathrm{R}_3 \leftarrow \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1$:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0\,, \text{ essendo uguali la seconda e la terza riga.}$$
Per cui avremo: $\mathrm{R}_2 + \mathrm{R}_1 = \mathrm{R}_3 - \mathrm{R}_1$, ovvero: $2\,\mathbb{X} + \mathbb{Y} - \mathbb{Z} = \mathbb{O}$.
Si può procedere anche in altro modo, usando i sistemi lineari.
Dovremo trovare α, β e γ tali che: $\alpha\,\mathbb{X} + \beta\,\mathbb{Y} + \gamma\,\mathbb{Z} = \mathbb{O}$, ovvero tali che:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 4\alpha - \beta + 7\gamma = 0 \end{cases} .$$

Il Determinante della matrice incompleta è chiaramente zero, dato che le sue colonne sono i vettori linearmente dipendenti $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$.
Sottraiamo alla terza equazione la seconda ed avremo il sistema:

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 5\gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 2\gamma = 0 \end{cases} ,$$

nel quale ora la terza equazione è uguale al doppio della prima e quindi è da scartare.
Le equazioni significative si riducono alle prime due ed avremo, portando l'incognita γ dalla parte dei termini noti:

$$\begin{cases} \alpha - \ \beta = \ -\gamma \\ 2\alpha + \beta \ = \ -5\gamma \end{cases} \text{ dalle quali facilmente si ricava: } \begin{cases} \alpha = \ -2\gamma \\ \beta \ = \ -\gamma \end{cases} .$$

Esistono quindi, al variare di γ, ∞^1 combinazioni lineari di $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ e $\mathbb{Z}$ che danno per risultato il vettore nullo, tutte esprimibili nella forma: $-2\gamma\,\mathbb{X} - \gamma\,\mathbb{Y} + \gamma\,\mathbb{Z} = \mathbb{O}$, che generalizza la soluzione trovata in precedenza.

TEOREMA DI ROUCHE' - CAPELLI

Detta **matrice incompleta** di un sistema lineare la matrice $\mathbb{A}$ formata dai coefficienti delle incognite, e detta **matrice completa** $(\mathbb{A} \mid \mathbb{Y})$ quella ottenuta aggiungendo all'incompleta la colonna dei termini noti, enunciamo ora un Teorema, valido per qualunque sistema lineare, atto a garantire la presenza di soluzioni per il sistema stesso.
Vale il seguente:
Teorema 15 (di Rouchè-Capelli) : Un sistema lineare, qualunque sia il numero delle sue equazioni e delle sue incognite, ammette soluzioni se e solo se la Caratteristica della matrice incompleta è uguale a quella della matrice completa. Ovvero:
$\exists\, \mathbb{X}$: $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1} \Leftrightarrow \text{Car}(\mathbb{A}) = \text{Car}(\mathbb{A} \mid \mathbb{Y})$.
Dimostrazione: Quanto affermato significa che un sistema ammette soluzioni se il vettore dei termini noti forma, insieme alle colonne della matrice del sistema, un insieme di vettori linearmente dipendenti in quanto, aggiungendo alle colonne il vettore dei termini noti, la Caratteristica, ovvero il numero dei vettori linearmente indipendenti, non aumenta; quindi il vettore dei termini noti si può esprimere come combinazione lineare delle colonne della matrice del sistema, ovvero $\mathbb{Y} = \text{C}_1 \cdot x_1 + \text{C}_2 \cdot x_2 + \ldots + \text{C}_n \cdot x_n$.
Se le due caratteristiche sono diverse, sarà: $\text{Car}(\mathbb{A} \mid \mathbb{Y}) = \text{Car}(\mathbb{A}) + 1$, e questo significa che il vettore dei termini noti è linearmente indipendente dalle colonne della matrice, quindi non è esprimibile come loro combinazione lineare, per cui il sistema non ammette soluzioni. ●

Se il sistema ammette soluzioni, la Caratteristica comune delle matrici completa ed incompleta esprime anche il numero delle equazioni significative del sistema: se m sono le equazioni, e k è la Caratteristica (ovviamente con $m \geq k$), ciò significa che $m - k$ equazioni sono combinazioni lineari di sole k di esse, e quindi possono essere scartate.
Per quanto concerne la determinazione delle soluzioni, occorre procedere nel seguente modo: determinata la comune Caratteristica k delle matrici incompleta e completa, si considerino come detto solo k equazioni in k incognite, che però formino una sottomatrice non singolare; le rimanenti $m - k$ equazioni, per quanto detto in precedenza, vengono scartate; k incognite rimarranno come tali mentre le rimanenti $n - k$ incognite vanno portate dalla parte dei termini noti, ed il sistema, divenuto di k equazioni in k incognite, si può risolvere con il Teorema di

Cramer. Il valore di ognuna delle k incognite rimaste sarà ora funzione delle $n-k$ incognite confluite nei termini noti, che non saranno quindi determinate, ma potranno assumere ogni valore reale. Si suole scrivere in questo caso che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni.
Potremo riepilogare quanto detto nel seguente modo:
da $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$, se $k = \mathrm{Car}(\mathbb{A}) = \mathrm{Car}\big(\mathbb{A}\big|\mathbb{Y}\big)$ è la Caratteristica comune alla matrici incompleta e completa, dopo aver scartato le $m-k$ equazioni inutili ed i loro termini noti, otteniamo, scrivendo a blocchi $\mathbb{A}_{k,n} = \big[\mathbb{A}'_{k,k} \,\big|\, \mathbb{A}''_{k,n-k}\big]$ e $\mathbb{X} = \big[\mathbb{X}_{k,1} \,\big|\, \mathbb{X}_{n-k,1}\big]$:
$\big[\mathbb{A}'_{k,k} \,\big|\, \mathbb{A}''_{k,n-k}\big] \cdot \big[\mathbb{X}_{k,1} \,\big|\, \mathbb{X}_{n-k,1}\big] = \mathbb{A}'_{k,k} \cdot \mathbb{X}_{k,1} + \mathbb{A}''_{k,n-k} \cdot \mathbb{X}_{n-k,1} = \mathbb{Y}_{k,1}$ da cui poi:
$\mathbb{A}'_{k,k} \cdot \mathbb{X}_{k,1} = \mathbb{Y}_{k,1} - \mathbb{A}''_{k,n-k} \cdot \mathbb{X}_{n-k,1}$, e quindi la soluzione:
$\mathbb{X}_{k,1} = \big(\mathbb{A}'_{k,k}\big)^{-1} \cdot \big(\mathbb{Y}_{k,1} - \mathbb{A}''_{k,n-k} \cdot \mathbb{X}_{n-k,1}\big)$,
dove $\big(\mathbb{A}'_{k,k}\big)^{-1}$ rappresenta l'inversa della matrice $\mathbb{A}'_{k,k}$, formata dai coefficienti delle k equazioni rimaste relativi alle k incognite mantenute come tali, sicuramente non singolare per costruzione.
La soluzione, dipendente dalle $n-k$ variabili $\mathbb{X}_{n-k,1}$, è detta **soluzione generale** del sistema.
Se il sistema fosse omogeneo, sarà $\mathbb{Y}_{k,1} = \mathbb{O}$, ed avremo la soluzione generale nella forma:
$\mathbb{X}_{k,1} = -\big(\mathbb{A}'_{k,k}\big)^{-1} \cdot \mathbb{A}''_{k,n-k} \cdot \mathbb{X}_{n-k,1}$.

Esempio 67 : Studiamo, al variare del parametro k, esistenza e numerosità delle soluzioni del sistema lineare: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = k \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$.

Consideriamo anzitutto la matrice incompleta: $\left\Vert \begin{matrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ 5 & -3 & 8 & -1 \end{matrix} \right\Vert$. Essa ha Caratteristica pari a 2; infatti $\mathrm{R}_3 = 2\,\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}_2$. Affinchè il sistema abbia soluzioni questa relazione dovrà sussistere anche tra i termini noti, in modo che anche la Caratteristica della matrice completa sia pari a 2. Dovrà quindi essere: $14 - k = 2$, ovvero $k = 12$.
Se $k \neq 12$ il sistema non ammette soluzioni.
Se $k = 12$ il sistema si riduce a due sole equazioni, e potremo scartare la terza, che come si è visto è combinazione lineare delle prime due.
Passiamo allora a risolvere il sistema:
$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 + 2x_3 + \ x_4 = 7 \\ x_1 + \ x_2 - 4x_3 + \ 3x_4 = 12 \end{cases}$
nel quale possiamo portare dalla parte dei termini noti le incognite x_3 e x_4 per avere:
$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 = \ -2x_3 - x_4 + 7 \\ x_1 + \ x_2 = 4x_3 - \ 3x_4 \ + 12 \end{cases}$
da cui, usando la Regola di Cramer, e dato che $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$, otteniamo:
$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2}\,x_3 - x_4 + \dfrac{19}{4} \\ x_2 = \dfrac{7}{2}\,x_3 - 2x_4 + \dfrac{29}{4} \end{cases},$$
e quindi la soluzione $\mathbb{X} = \left(\dfrac{1}{2}\,x_3 - x_4 + \dfrac{19}{4}; \dfrac{7}{2}\,x_3 - 2x_4 + \dfrac{29}{4}; x_3; x_4\right)$.

Esempio 68 : Determiniamo per quali valori dei parametri m e k il sistema:

$\begin{cases} x+2y+3z=m \\ x+my+kz=k \end{cases}$ ammette soluzioni.

Consideriamo le matrici incompleta e completa del sistema, che sono:
$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & k \end{Vmatrix}$ e $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & m \\ 1 & m & k & k \end{Vmatrix}$. La Caratteristica dell'incompleta sarà 2 se:
$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$, oppure se $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & k \end{vmatrix} \neq 0$, oppure se $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ m & k \end{vmatrix} \neq 0$, e cioè quando:
$m-2 \neq 0 \Rightarrow m \neq 2$, o se $k-3 \neq 0 \Rightarrow k \neq 3$, o se $2k-3m \neq 0 \Rightarrow k \neq \dfrac{3}{2}m$.

Essendo, in ciascuno di questi casi, massima e pari a 2 la Caratteristica della matrice incompleta, questa sarà uguale a quella della matrice completa, e quindi il sistema ammette soluzioni. Essendo un sistema di due equazioni in tre incognite, esso avrà ∞^1 soluzioni.

Nel caso $m=2$ e $k=3$ (per cui anche $k=\dfrac{3}{2}m$), la Caratteristica della matrice incompleta non può essere 2 (ed è 1, in quanto ci sono elementi non nulli); la matrice completa risulta uguale a $\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{Vmatrix}$ la cui Caratteristica è però 2, in quanto $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ e quindi il sistema per $m=2$ e $k=3$ non ammette soluzioni.

Esempio 69 : Risolviamo il sistema $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x-3y-z=3 \\ 2x+4y+2z=4 \end{cases}$.

Il sistema è formato da quattro equazioni in tre incognite, per cui, se vi sono soluzioni, almeno un'equazione dovrà essere una combinazione lineare delle altre. Essendo la quarta equazione uguale al doppio della prima, essa può essere scartata.

Il sistema si riduce quindi al seguente: $\begin{cases} x+2y+z=2 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x-3y-z=3 \end{cases}$.

Applicando il Teorema di Cramer, calcoliamo il Determinante, ed otteniamo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -30.$$

Il sistema ammette quindi una ed una sola soluzione, che sarà data da:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & -1 \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{1}{30} \cdot 6 \cdot (-4-1) = 1 \ ;$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-30} = 0 \ ;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{-30} = \frac{\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}}{-30} = -\frac{1}{30} \cdot (-5)(3+3) = 1 \ .$$

Esempio 70 : Determiniamo il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{Y}=(1,7,2,k)$ risulta combinazione lineare dei vettori $\mathbb{X}_1=(1,-1,0,2)$ e $\mathbb{X}_2=(2,2,1,-1)$.
Vediamo anzitutto che i vettori $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ sono linearmente indipendenti, in quanto la caratteristica della matrice $\begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\end{Vmatrix}$ risulta uguale a 2. Calcoliamo allora, con operazioni elementari sulle righe, la caratteristica della matrice $\begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 7 & 2 & k\end{Vmatrix}$. Avremo:

$$\begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 1 & -1\\ 1 & 7 & 2 & k\end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -5\\ 0 & 8 & 2 & k-2\end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix}1 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -5\\ 0 & 0 & 0 & k+8\end{Vmatrix}.$$

Se $\mathbb{Y}$ è combinazione lineare di $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ la caratteristica di quest'ultima matrice deve rimanere uguale a 2, e questo accade se $k=-8$.
L'applicazione del Teorema di Rouchè-Capelli avrebbe richiesto di disporre i tre vettori per colonna, ma si può operare anche per righe dato che $\mathrm{Car}(\mathbb{A})=\mathrm{Car}\left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)$.

SOLUZIONI DI UN SISTEMA E DEL SISTEMA OMOGENEO ASSOCIATO
Dato il sistema lineare $\mathbb{A}_{m,n}\cdot\mathbb{X}_{n,1}=\mathbb{Y}_{m,1}$, con $\mathbb{Y}\neq\mathbb{O}$, diciamo $\mathbb{A}_{m,n}\cdot\mathbb{X}_{n,1}=\mathbb{O}$ il **sistema omogeneo associato**. Vale allora il seguente:
Teorema 16 : Il sistema $\mathbb{A}_{m,n}\cdot\mathbb{X}_{n,1}=\mathbb{Y}_{m,1}$ ammette soluzioni se e solo se ogni sua soluzione $\mathbb{X}$ può essere espressa come somma di una soluzione particolare $\mathbb{X}^*$ del sistema non omogeneo con la soluzione generale $\mathbb{Z}$ del sistema omogeneo associato.
Dimostrazione: Se $\mathbb{X}$ e $\mathbb{X}^*$ sono soluzioni del sistema, da $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{Y}$ e $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}^*=\mathbb{Y}$, sottraendo otteniamo $\mathbb{A}\cdot(\mathbb{X}-\mathbb{X}^*)=\mathbb{O}$, ovvero $\mathbb{X}-\mathbb{X}^*$ è soluzione del sistema omogeneo associato, per cui $\mathbb{X}-\mathbb{X}^*=\mathbb{Z}$ e quindi $\mathbb{X}=\mathbb{X}^*+\mathbb{Z}$.
Viceversa, se $\mathbb{X}=\mathbb{X}^*+\mathbb{Z}$, con $\mathbb{X}^*$ soluzione del sistema non omogeneo e $\mathbb{Z}$ soluzione generale del sistema omogeneo associato, sarà: $\mathbb{A}\cdot(\mathbb{X}^*+\mathbb{Z})=\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}^*+\mathbb{A}\cdot\mathbb{Z}=\mathbb{Y}+\mathbb{O}=\mathbb{Y}$, e quindi $\mathbb{X}$ è soluzione del sistema non omogeneo. ●

Esempio 71 : Studiamo la risolvibilità del sistema:

$$\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=1\\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=2\\ 4x_1+x_2-2x_3+4x_4+2x_5=0\end{cases}.$$

Presa la matrice incompleta $\begin{Vmatrix}1 & 1 & -2 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6\\ 4 & 1 & -2 & 4 & 2\end{Vmatrix}$, se consideriamo i 4 minori di ordine 3 che si possono formare usando le prime 4 colonne, vediamo che essi hanno tutti Determinante nullo. Considerando il minore di ordine 3 formato con prima, seconda e quinta colonna, si ha:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 6\\ 4 & 1 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 4 & 1 & -10\end{vmatrix}=-10\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-10\cdot(-3)=30\neq 0.$$

La matrice incompleta ha Caratteristica 3, cioè massima, quindi anche quella della completa sarà 3, per cui il sistema ha soluzioni, e queste si possono ottenere portando dalla parte dei termini noti le incognite x_3 e x_4, ed avremo:

$$\begin{cases} x_1+x_2+3x_5=1+2x_3-x_4\\ 2x_1-x_2+6x_5=2-2x_3-2x_4\\ 4x_1+x_2+2x_5=2x_3-4x_4\end{cases},$$

dalle quali, risolvendo con Cramer, si ottiene:

$$x_1 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1+2x_3-x_4 & 1 & 3 \\ 2-2x_3-2x_4 & -1 & 6 \\ 2x_3-4x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -x_4 - \frac{1}{5} \ ,$$

$$x_2 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 1+2x_3-x_4 & 3 \\ 2 & 2-2x_3-2x_4 & 6 \\ 4 & 2x_3-4x_4 & 2 \end{vmatrix} = 2x_3 \ ,$$

$$x_5 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+2x_3-x_4 \\ 2 & -1 & 2-2x_3-2x_4 \\ 4 & 1 & 2x_3-4x_4 \end{vmatrix} = \frac{2}{5} \ ,$$

e quindi il sistema ammette ∞^2 soluzioni: $\mathbb{X} = \left(-x_4 - \frac{1}{5}\,, 2x_3\,, x_3\,, x_4\,, \frac{2}{5}\right)$.

Consideriamo il sistema omogeneo associato $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+x_4+3x_5=0 \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 4x_1+x_2-2x_3+4x_4+2x_5=0 \end{cases}$; valendo per la sua matrice incompleta le stesse considerazioni fatte in precedenza, si ha la soluzione:

$$x_1 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 2x_3-x_4 & 1 & 3 \\ -2x_3-2x_4 & -1 & 6 \\ 2x_3-4x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -x_4 \ ,$$

$$x_2 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 2x_3-x_4 & 3 \\ 2 & -2x_3-2x_4 & 6 \\ 4 & 2x_3-4x_4 & 2 \end{vmatrix} = 2x_3 \ ,$$

$$x_5 = \frac{1}{30}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2x_3-x_4 \\ 2 & -1 & -2x_3-2x_4 \\ 4 & 1 & 2x_3-4x_4 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

La soluzione generale del sistema omogeneo associato è quindi $\mathbb{Z} = (-x_4, 2x_3, x_3, x_4, 0)$.

Verificato che $\mathbb{X}^* = \left(-\frac{1}{5}, 0, 0, 0, \frac{2}{5}\right)$ è una soluzione particolare del sistema, risulta allora soddisfatta l'uguaglianza: $\mathbb{X} = \mathbb{X}^* + \mathbb{Z}$.

NUCLEO ED IMMAGINE DI UNA APPLICAZIONE LINEARE

Definizione 38 : L'**Immagine** di una applicazione lineare $\mathbb{Y} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ è l'insieme:
$\text{Imm}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{Y} \in \mathbb{R}^m \colon \exists\, \mathbb{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbb{Y} = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}\}$.
L'Immagine coincide quindi con il codominio dell'applicazione lineare.
Vale il:

Teorema 17 : L'Immagine di una applicazione lineare è uno spazio vettoriale la cui dimensione coincide con la Caratteristica della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$.

Dimostrazione: Se $\mathbb{Y}_1 \in \text{Imm}(\mathbb{A})$ e $\mathbb{Y}_2 \in \text{Imm}(\mathbb{A})$, sarà $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{Y}_2 = \mathbb{A}\cdot\mathbb{X}_2$, da cui segue, applicando le proprietà del prodotto matriciale:
$k_1\,\mathbb{Y}_1 + k_2\,\mathbb{Y}_2 = k_1\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}_1 + k_2\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}_2 = \mathbb{A}\cdot(k_1\,\mathbb{X}_1 + k_2\,\mathbb{X}_2)$,
per cui, dato che $k_1\,\mathbb{X}_1 + k_2\,\mathbb{X}_2 \in \mathbb{R}^n$, segue che $k_1\,\mathbb{Y}_1 + k_2\,\mathbb{Y}_2 \in \text{Imm}(\mathbb{A})$, ovvero che il codominio di una applicazione lineare è uno spazio vettoriale.
Se vediamo l'applicazione lineare come una combinazione lineare delle colonne della matrice $\mathbb{A}$, dalla $\mathbb{Y} = \text{C}_1\cdot x_1 + \text{C}_2\cdot x_2 + \ \ldots\ + \text{C}_n\cdot x_n$ segue subito che la dimensione di tale spazio vettoriale è data dal numero massimo di colonne indipendenti di $\mathbb{A}$, cioè da Car($\mathbb{A}$). ●

Definizione 39 : Il **Nucleo** (Kernel) di una applicazione lineare è l'insieme:
$\text{Ker}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n \colon \mathbb{A}\cdot\mathbb{X} = \mathbb{O}\}$,

ovvero l'insieme dei vettori del dominio che hanno per immagine il vettore nullo.
Teorema 18: Il Nucleo di una applicazione lineare è un sottospazio vettoriale del dominio $\mathbb{R}^n$.
Dimostrazione: Se $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ appartengono al Nucleo, dato che:
$\mathbb{A} \cdot (k_1 \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2) = k_1 \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \mathbb{O} + \mathbb{O} = \mathbb{O}$,
segue che il Nucleo è un sottospazio vettoriale del dominio $\mathbb{R}^n$. ●

E' facile vedere le analogie che legano da un lato il Nucleo di un'applicazione lineare ed i sistemi lineari omogenei, dall'altro l'Immagine e i sistemi lineari non omogenei che ammettono soluzioni.

Vale poi il seguente:
Teorema 19 : In una applicazione lineare, vettori linearmente dipendenti hanno immagini linearmente dipendenti.
Dimostrazione: Da $k_1\mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2 + ... + k_p \mathbb{X}_p = \mathbb{O}$, con almeno un $k_i \neq 0$, segue:
$\mathbb{A} \cdot (k_1\mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{X}_2 + ... + k_p \mathbb{X}_p) = \mathbb{A} \cdot k_1\mathbb{X}_1 + \mathbb{A} \cdot k_2 \mathbb{X}_2 ... + \mathbb{A} \cdot k_p \mathbb{X}_p = \mathbb{O}$ da cui:
$k_1 \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 + k_2 \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 ... + k_p \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_p = \mathbb{O}$ ovvero:
$k_1 f(\mathbb{X}_1) + k_2 f(\mathbb{X}_2) ... + k_p f(\mathbb{X}_p) = \mathbb{O}$, con almeno un $k_i \neq 0$ e quindi le immagini sono linearmente dipendenti. ●

Di conseguenza, varrà anche il
Teorema 20 : In una applicazione lineare, immagini linearmente indipendenti provengono da vettori linearmente indipendenti.

RELAZIONE TRA LE DIMENSIONI DEL NUCLEO E DELL'IMMAGINE
Data l'applicazione lineare $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$, se $\mathbb{Y} \in \text{Imm}(\mathbb{A})$ sarà anche:
$\text{Car}(\mathbb{A}) = \text{Car}(\mathbb{A} \,|\, \mathbb{Y})$. Si è visto che la dimensione dell'Immagine di una applicazione lineare coincide con la Caratteristica della matrice $\mathbb{A}_{m,n}$: $\text{Dim}(\text{Imm}(\mathbb{A})) = \text{Car}(\mathbb{A}) = k$.
Passando al sistema lineare omogeneo associato $(\mathbb{Y}_{k,1} = \mathbb{O})$ avremo la soluzione:
$\mathbb{X}_{k,1} = -\left(\mathbb{A}'_{k,k}\right)^{-1} \cdot \mathbb{A}''_{k,n-k} \cdot \mathbb{X}_{n-k,1}$, dalla quale vediamo che $\text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A})) = n - k$, ovvero la dimensione del Nucleo è pari al numero delle incognite portate dalla parte dei termini noti.
Quanto detto viene sintetizzato nel seguente
Teorema 21 (di Sylvester o dell'Immagine) : La somma delle dimensioni dell'Immagine e del Nucleo di una applicazione lineare è pari alla dimensione del dominio, ovvero:
$\text{Dim}(\text{Imm}(\mathbb{A})) + \text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A})) = \text{Dim}(\mathbb{R}^n)$ o anche:
$\text{Dim}(\text{Imm}(\mathbb{A})) + \text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A}))$ = numero delle colonne di $\mathbb{A}$.
Infatti, per quanto visto in precedenza, $k + (n - k) = n$.

Esempio 72 : Data l'applicazione lineare $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$, con $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} k & 2 & k \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix} \right\|$, determiniamo, al variare del parametro k, le dimensioni del Nucleo e dell'Immagine dell'applicazione.
Essendo $\text{Det}(\mathbb{A}) = -4(1+k)$, ne segue che:
-per $k = -1$, $\text{Car}(\mathbb{A}) = 2 \Rightarrow \text{Dim}(\text{Imm}) = 2$ e $\text{Dim}(\text{Ker}) = 3 - 2 = 1$;
-per $k \neq -1$, $\text{Car}(\mathbb{A}) = 3 \Rightarrow \text{Dim}(\text{Imm}) = 3$ e $\text{Dim}(\text{Ker}) = 3 - 3 = 0$.

APPLICAZIONI LINEARI SURGETTIVE, INIETTIVE, INVERTIBILI

Dato che le applicazioni lineari sono funzioni da $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, studiamo il problema dell'esistenza della loro funzione inversa, che richiede anzitutto di stabilire quando un'applicazione lineare risulti surgettiva e quando iniettiva.

Data l'applicazione lineare: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$, essa risulta surgettiva se la sua Immagine coincide con tutto $\mathbb{R}^m$, ovvero se $\text{Dim}(\text{Imm}(\mathbb{A})) = m$.
Ma allora dovrà risultare $\text{Dim}(\text{Imm}(\mathbb{A})) = \text{Car}(\mathbb{A}) = m$ ($\leq n$ numero delle colonne di $\mathbb{A}$).

Per avere un'applicazione lineare $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$ che risulti iniettiva dovrà accadere che:
$f(\mathbb{X}_1) = f(\mathbb{X}_2) \Rightarrow \mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$.
Ma $f(\mathbb{X}_1) = f(\mathbb{X}_2) \Rightarrow f(\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2) = \mathbb{O}$, ovvero che $\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2 \in \text{Ker}(\mathbb{A})$.
Avremo allora che $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2$ se e solo se $\text{Ker}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{O}\}$, cioè se $\text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A})) = 0$, ovvero se $(n-k) = 0 \Rightarrow \text{Car}(\mathbb{A}) = k = n$ ($\leq m$ numero delle righe di $\mathbb{A}$).

Per avere infine una applicazione lineare invertibile, essa dovrà risultare una corrispondenza biunivoca, ovvero sia surgettiva che iniettiva, e per quanto precedentemente visto dovrà allora risultare: $\text{Car}(\mathbb{A}) = k = m = n$, e quindi la matrice $\mathbb{A}$ dovrà essere quadrata e non singolare.
Da $\mathbb{A}_n \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{n,1}$, nell'ipotesi che $\mathbb{A}$ sia invertibile, otteniamo $\mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{Y}_{n,1}$, e quindi la $\mathbb{Y}_{n,1} = \mathbb{A}_n^{-1} \cdot \mathbb{X}_{n,1}$, che costituisce l'espressione dell'inversa dell'applicazione lineare.

Esempio 73 : Per l'applicazione lineare $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$, con $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} k & 2 & k \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{Vmatrix}$, in base a quanto visto nell'Esempio 72, abbiamo che:
-per $k = -1$, $\text{Dim}(\text{Imm}) = 2$ e $\text{Dim}(\text{Ker}) = 1$, per cui l'applicazione non risulta né surgettiva né iniettiva;
-per $k \neq -1$, $\text{Dim}(\text{Imm}) = 3$ e $\text{Dim}(\text{Ker}) = 0$, per cui l'applicazione risulta sia surgettiva che iniettiva, e quindi invertibile.

COMPOSIZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{m,1}$ e sia poi $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbb{B}_{p,m} \cdot \mathbb{Y}_{m,1} = \mathbb{Z}_{p,1}$.
Vediamo che la composizione delle due applicazioni lineari risulta essere ancora un'applicazione lineare; infatti, posto $\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}) = \mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1}$ e $\mathbb{Z} = g(\mathbb{Y}) = \mathbb{B}_{p,m} \cdot \mathbb{Y}_{m,1}$, si ha:
$\mathbb{Z} = g(\mathbb{Y}) = g(f(\mathbb{X})) = \mathbb{B}_{p,m} \cdot \mathbb{Y}_{m,1} = \mathbb{B}_{p,m} \cdot (\mathbb{A}_{m,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1}) = (\mathbb{B}_{p,m} \cdot \mathbb{A}_{m,n}) \cdot \mathbb{X}_{n,1}$.
Quindi l'applicazione lineare composta è data da $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbb{C}_{p,n} \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Z}_{p,1}$, dove $\mathbb{C}_{p,n} = \mathbb{B}_{p,m} \cdot \mathbb{A}_{m,n}$. La composizione di due o più applicazioni lineari ha per matrice il prodotto delle matrici delle applicazioni lineari componenti.

Esempio 74 : Siano $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $\mathbb{A}_{4,2} \cdot \mathbb{X}_{2,1} = \mathbb{Y}_{4,1}$ e $g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{B}_{3,4} \cdot \mathbb{Y}_{4,1} = \mathbb{Z}_{3,1}$, con: $\mathbb{A}_{4,2} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}_{3,4} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix}$. La composizione delle applicazioni lineari sarà la $g \circ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}_{3,2} \cdot \mathbb{X}_{2,1} = \mathbb{Z}_{3,1}$, con

$$\mathbb{C}_{3,2} = \mathbb{B}_{3,4} \cdot \mathbb{A}_{4,2} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{Vmatrix}.$$

BASI ORTONORMALI - MATRICI ORTOGONALI

Due vettori si dicono **ortogonali** (ovvero perpendicolari) se è nullo il loro prodotto scalare, e un vettore il cui modulo sia uguale ad 1 viene detto versore o vettore normalizzato.

Definizione 40 : Si dice **base ortonormale** di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ una base che sia costituita da versori a due a due ortogonali tra loro.

Se $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ costituiscono una base ortonormale, allora, dato che vettori distinti sono perpendicolari e che ciascuno ha modulo pari ad 1, avremo: $\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

Definizione 41 : Una matrice si dice **ortogonale** se $\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$.

La definizione data richiede che la matrice $\mathbb{A}$ sia quadrata e non singolare, quindi dotata di matrice inversa; essendo $\mathbb{A}^{-1}$ l'unica matrice per cui valga la: $\mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{-1} = \mathbb{I}$, ne segue che una matrice ortogonale è una matrice per la quale risulta $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{-1}$.

Dalla definizione segue anche che le righe (e le colonne) della matrice ortogonale costituiscono una base ortonormale.

Si vede facilmente che le matrici unità $\mathbb{I}_n$ e tutte le matrici di permutazione sono matrici ortogonali.

Per le matrici ortogonali valgono le seguenti proprietà:

O1) Se $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{B}_n$ sono ortogonali, anche $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \cdot \mathbb{A}$ sono matrici ortogonali:
infatti: $(\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})^{\mathrm{T}} \cdot (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}) = \mathbb{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{B}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{I} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{I}$, e quindi la tesi;

O2) Se $\mathbb{A}$ è ortogonale, allora $|\mathbb{A}| = \pm 1$:
infatti: da $\left|\mathbb{A} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\mathbb{I}|$ segue $|\mathbb{A}| \cdot \left|\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right| = |\mathbb{A}|^2 = |\mathbb{I}| = 1$ e quindi $|\mathbb{A}| = \pm 1$;

O3) Se $\mathbb{A}$ è ortogonale, allora anche $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ e $\mathbb{A}^{-1}$ sono ortogonali:
infatti $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$ mentre
$\mathbb{A}^{-1} \cdot \left(\mathbb{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{-1} \cdot \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \mathbb{I}$;

O4) Se $\mathbb{A}$ è ortogonale, allora anche $\mathbb{A}^k$ è ortogonale:
infatti: $\left(\mathbb{A}^k\right)^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^k = \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\right)^k \cdot \mathbb{A}^k = \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot ... \cdot \left(\mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}\right) \cdot ... \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{A} = \mathbb{I}$.

BASI ORTONORMALI: PROCEDURA DI GRAM-SCHMIDT

Se $\{\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n\}$ formano una base di $\mathbb{R}^n$, ma non valgono le $\mathbb{X}_i \cdot \mathbb{X}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, esiste un metodo, attribuito a Gram-Schmidt, che permette, partendo da $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$, di costruire una base ortonormale.

Prendiamo il primo vettore della base, $\mathbb{X}_1$, e poniamo $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{X}_1$.

Il vettore normalizzato $\mathbb{W}_1 = \dfrac{\mathbb{Z}_1}{\|\mathbb{Z}_1\|}$ costituisce il primo elemento della base ortonormale.

Per determinare il secondo, $\mathbb{W}_2$, determiniamo anzitutto un vettore $\mathbb{Z}_2$, espresso come:
$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{X}_2 - \alpha\, \mathbb{W}_1$,
ovvero il secondo vettore della base originaria meno un opportuno multiplo del primo vettore trovato della base ortonormale.

$\mathbb{Z}_2$ dovrà allora risultare perpendicolare a $\mathbb{W}_1$, visto la base ortonormale che si vuol costruire, per cui dovrà essere:

$\mathbb{Z}_2 \cdot \mathbb{W}_1 = (\mathbb{X}_2 - \alpha\, \mathbb{W}_1) \cdot \mathbb{W}_1 = \mathbb{X}_2 \cdot \mathbb{W}_1 - \alpha\, \mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_1 = 0\,,$
dalla quale, essendo $\mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_1 = 1$, otteniamo:
$\alpha = \mathbb{X}_2 \cdot \mathbb{W}_1 = \; < \mathbb{X}_2, \mathbb{W}_1 >$ per avere quindi:
$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{X}_2 - \; < \mathbb{X}_2, \mathbb{W}_1 > \; \cdot \mathbb{W}_1\,.$
Il secondo vettore della base ortonormale sarà allora dato da $\mathbb{W}_2 = \dfrac{\mathbb{Z}_2}{\|\mathbb{Z}_2\|}$.
Per determinare il terzo vettore, porremo:
$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{X}_3 - \alpha\, \mathbb{W}_1 - \beta\, \mathbb{W}_2$
ed imponendo che $\mathbb{Z}_3$ risulti perpendicolare sia a $\mathbb{W}_1$ che a $\mathbb{W}_2$ otteniamo:

$$\begin{cases} \mathbb{Z}_3 \cdot \mathbb{W}_1 = (\mathbb{X}_3 - \alpha\, \mathbb{W}_1 - \beta\, \mathbb{W}_2) \cdot \mathbb{W}_1 = \mathbb{X}_3 \cdot \mathbb{W}_1 - \alpha\, \mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_1 - \beta\, \mathbb{W}_2 \cdot \mathbb{W}_1 \\ \mathbb{Z}_3 \cdot \mathbb{W}_2 = (\mathbb{X}_3 - \alpha\, \mathbb{W}_1 - \beta\, \mathbb{W}_2) \cdot \mathbb{W}_2 = \mathbb{X}_3 \cdot \mathbb{W}_2 - \alpha\, \mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_2 - \beta\, \mathbb{W}_2 \cdot \mathbb{W}_2 \end{cases}.$$

Essendo, per la base ortonormale, $\mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_1 = \mathbb{W}_2 \cdot \mathbb{W}_2 = 1$ e $\mathbb{W}_1 \cdot \mathbb{W}_2 = \mathbb{W}_2 \cdot \mathbb{W}_1 = 0$, otteniamo:

$$\begin{cases} \alpha = \mathbb{X}_3 \cdot \mathbb{W}_1 = \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_1 > \\ \beta = \mathbb{X}_3 \cdot \mathbb{W}_2 = \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_2 > \end{cases} \quad \text{per cui sarà:}$$

$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{X}_3 - \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_1 > \; \cdot \mathbb{W}_1 - \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_2 > \; \cdot \mathbb{W}_2\,.$
Il terzo vettore della base ortonormale sarà infine dato da $\mathbb{W}_3 = \dfrac{\mathbb{Z}_3}{\|\mathbb{Z}_3\|}$.
Generalizzando la procedura, l'i-esimo vettore della base ortonormale sarà $\mathbb{W}_i = \dfrac{\mathbb{Z}_i}{\|\mathbb{Z}_i\|}$, con
$\mathbb{Z}_i = \mathbb{X}_i - \; < \mathbb{X}_i, \mathbb{W}_1 > \; \cdot \mathbb{W}_1 - \; < \mathbb{X}_i, \mathbb{W}_2 > \; \cdot \mathbb{W}_2 - ... - \; < \mathbb{X}_i, \mathbb{W}_{i-1} > \; \cdot \mathbb{W}_{i-1}\,.$

Esempio 75 : Si consideri la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai tre vettori:
$\mathbb{X}_1 = (0,1,1)$, $\mathbb{X}_2 = (1,0,1)$, $\mathbb{X}_3 = (1,1,0)$ e determiniamo, partendo da questa, una base ortonormale. Ovviamente si è prima controllato che i tre vettori siano linearmente indipendenti e che non risultino già tra loro a due a due perpendicolari.
Sarà $\mathbb{W}_1 = \dfrac{\mathbb{Z}_1}{\|\mathbb{Z}_1\|} = \dfrac{\mathbb{X}_1}{\|\mathbb{X}_1\|} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ il primo vettore della base ortonormale.
Da $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{X}_2 - \; < \mathbb{X}_2, \mathbb{W}_1 > \; \cdot \mathbb{W}_1$ otteniamo, essendo $< \mathbb{X}_2, \mathbb{W}_1 > \; = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$:
$\mathbb{Z}_2 = (1,0,1) - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, ed essendo $\|\mathbb{Z}_2\| = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ si ha:
$\mathbb{W}_2 = \dfrac{\mathbb{Z}_2}{\|\mathbb{Z}_2\|} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}, -\dfrac{1}{\sqrt{6}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right).$
Per trovare infine il terzo vettore, calcoliamo anzitutto:
$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{X}_3 - \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_1 > \; \cdot \mathbb{W}_1 - \; < \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_2 > \; \cdot \mathbb{W}_2$ ed essendo:
$< \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_1 > \; = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $< \mathbb{X}_3, \mathbb{W}_2 > \; = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ otteniamo:

$$\mathbb{Z}_3 = (1,1,0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

da cui infine, essendo $\|\mathbb{Z}_3\| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, otteniamo $\mathbb{W}_3 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. I vettori:

$$\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, \mathbb{W}_3\} = \left\{\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right\}$$

costituiscono la base ortonormale cercata.

CAMBIAMENTI DI BASE

Per esprimere un qualunque elemento di uno spazio vettoriale occorre disporre di una base di tale spazio. Abbiamo visto come ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ sia esprimibile in uno ed in un solo modo come combinazione lineare degli n elementi della base assegnata.
Se non viene specificato altrimenti, scrivendo $\mathbb{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ intendiamo il vettore $\mathbb{X}$ espresso mediante la base canonica, ovvero $\mathbb{X} = \mathbb{X}_e = x_1\, \mathbf{e}_1 + x_2\, \mathbf{e}_2 + ... + x_n\, \mathbf{e}_n$.
Se venisse scelta una qualunque altra base, sempre formata da n vettori indipendenti, si pone il problema di trovare le coordinate del vettore $\mathbb{X}$ in funzione degli elementi della nuova base.
Il problema può essere ricondotto alle applicazioni lineari ed a loro opportune composizioni.
Essendo $\mathbb{X} = \mathbb{I}_n \cdot \mathbb{X}$, ed avendo $\mathbb{I}_n$ come colonne gli elementi della base canonica, osserviamo come ogni vettore $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$ si possa scrivere come prodotto di un'opportuna matrice, che nel caso della base canonica è la matrice unità $\mathbb{I}_n$, per il vettore colonna $\mathbb{X}$ costituito dalle sue coordinate rispetto a tale base.
Se usassimo una base diversa dalla canonica, diciamo $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$, e se il vettore $\mathbb{X}$ avesse rispetto a tale base coordinate $\mathbb{X}_{\mathrm{w}} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, sarà allora:
$\mathbb{X}_e = \alpha_1\, \mathbb{W}_1 + \alpha_2\, \mathbb{W}_2 + ... + \alpha_n\, \mathbb{W}_n$,
che potremo anche scrivere come:

$$\mathbb{X}_e = \mathbb{W} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{w}} = \left[\mathbb{W}_1 \middle| \mathbb{W}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{W}_n\right] \cdot \left\| \begin{matrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ ... \\ \alpha_n \end{matrix} \right\| ,$$

ovvero come il prodotto di una matrice $\mathbb{W}$, avente per colonne i vettori $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n$ della base per il vettore colonna $\mathbb{X}_{\mathrm{w}}$ costituito dalle coordinate di $\mathbb{X}_e$ rispetto alla nuova base.
I vettori $\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n$ costituiscono una base, quindi sono linearmente indipendenti, per cui la matrice $\mathbb{W}$ è non singolare e quindi invertibile.
Essendo $\mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \mathbb{X}_{\mathrm{w}}$, mediante il prodotto $\mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e$ otteniamo le coordinate $\mathbb{X}_{\mathrm{w}}$ del vettore $\mathbb{X}$ rispetto alla nuova base $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$.
La matrice $\mathbb{W}^{-1}$ viene detta **matrice di transizione** dalla base canonica alla nuova base.
Un cambiamento di base è quindi un'applicazione lineare invertibile da $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.
Se stabiliamo una ulteriore nuova base per $\mathbb{R}^n$: $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n\}$ e vogliamo esprimere il vettore $\mathbb{X}_e$ in funzione di questa, ragionando come nel caso precedente, otterremo:
$\mathbb{X}_e = \mathbb{V} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{v}}$ da cui poi $\mathbb{V}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \mathbb{X}_{\mathrm{v}}$,
dove $\mathbb{V}$ è ora la matrice avente per colonne i vettori $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n\}$.
Essendo allora: $\mathbb{X}_e = \mathbb{W} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{w}} = \mathbb{V} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{v}}$ otteniamo, premoltiplicando opportunamente:
$\mathbb{X}_{\mathrm{w}} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{v}}$ oppure $\mathbb{X}_{\mathrm{v}} = \mathbb{V}^{-1} \cdot \mathbb{W} \cdot \mathbb{X}_{\mathrm{w}}$
per avere direttamente il passaggio dalle coordinate $\mathbb{X}_{\mathrm{v}}$ alle $\mathbb{X}_{\mathrm{w}}$ e viceversa.
La matrice $\mathbb{P} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{V}$ costituisce la matrice di transizione dalla base $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n\}$ alla base $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$, la matrice $\mathbb{S} = \mathbb{V}^{-1} \cdot \mathbb{W}$ invece quella dalla base $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$ alla base $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2, ..., \mathbb{V}_n\}$.
Ovviamente $\mathbb{S} = \mathbb{V}^{-1} \cdot \mathbb{W} = \left(\mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{V}\right)^{-1} = \mathbb{P}^{-1}$.

Esempio 76 : Consideriamo il vettore $\mathbb{X}_e = (3, 5)$.
Presa la nuova base $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2\} = \{(1, 1), (1, -1)\}$, sarà $\mathbb{W} = \left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix} \right\|$ dalla quale otteniamo: $\mathbb{W}^{-1} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{matrix} \right\|$. Si vede poi facilmente che $\mathbb{X}_{\mathrm{w}} = (4, -1)$.

Presa l'altra base $\{\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_2\} = \{(2,1), (1,2)\}$, sarà $\mathbb{V} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix}$ ed inoltre $\mathbb{X}_\mathrm{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Eseguendo i prodotti si verifica che: $\begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{7}{3} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 4 \\ -1 \end{Vmatrix}$, ovvero che: $\mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{V} \cdot \mathbb{X}_\mathrm{v} = \mathbb{X}_\mathrm{w}$.

CAMBIAMENTI DI BASE ED APPLICAZIONI LINEARI

Sia $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{A}_n \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{n,1}$ un'applicazione lineare, e siano $\mathbb{X} = \mathbb{X}_e$ e $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}_e$ espressi mediante la base canonica. Operiamo in $\mathbb{R}^n$ un cambiamento di base utilizzando i vettori $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$, rispetto ai quali avremo, per $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, le nuove coordinate $\mathbb{X}_\mathrm{w}$ e $\mathbb{Y}_\mathrm{w}$. Vogliamo vedere se esiste una matrice $\mathbb{B}$ tale che $\mathbb{B} \cdot \mathbb{X}_\mathrm{w} = \mathbb{Y}_\mathrm{w}$, tale cioè da realizzare un'applicazione lineare nella quale l'immagine di $\mathbb{X}_\mathrm{w}$, il trasformato di $\mathbb{X}_e$, sia $\mathbb{Y}_\mathrm{w}$, ovvero il trasformato di $\mathbb{Y}_e$.

Per quanto visto in precedenza, sarà $\mathbb{X}_\mathrm{w} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e$ e $\mathbb{Y}_\mathrm{w} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{Y}_e$, dalle quali, sostituendo nella $\mathbb{B} \cdot \mathbb{X}_\mathrm{w} = \mathbb{Y}_\mathrm{w}$, avremo: $\mathbb{B} \cdot \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{Y}_e$ ovvero:
$\mathbb{W} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \mathbb{Y}_e = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_e$ dalla quale si ottiene $\mathbb{W} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{W}^{-1} = \mathbb{A}$ e quindi:
$\mathbb{B} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{W}$, che risulta quindi la matrice rappresentativa della stessa applicazione lineare ma rispetto alla base $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2, ..., \mathbb{W}_n\}$.

Esempio 77 : Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{A}_2 \cdot \mathbb{X}_{2,1} = \mathbb{Y}_{2,1}$, con $\mathbb{A}_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$. Sia $\mathbb{X}_{2,1} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix}$ per cui sarà $\mathbb{Y}_{2,1} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \end{Vmatrix}$.

Introduciamo una nuova base per $\mathbb{R}^2$ mediante i vettori $\{\mathbb{W}_1, \mathbb{W}_2\} = \{(1,1), (1,-1)\}$.

Sarà $\mathbb{W} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{W}^{-1} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$ e quindi:

$\mathbb{X}_\mathrm{w} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}$ e

$\mathbb{Y}_\mathrm{w} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{Y}_e = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ -1 \end{Vmatrix}$.

Sarà $\mathbb{B} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}$, da cui otteniamo: $\mathbb{B} \cdot \mathbb{X}_\mathrm{w} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 6 \\ -1 \end{Vmatrix} = \mathbb{Y}_\mathrm{w}$, e sarà anche:

$\mathbb{W} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{X}_e = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 5 \\ 7 \end{Vmatrix} = \mathbb{Y}_e$.

MATRICI SIMILI

Prendendo spunto da quanto visto nel paragrafo precedente, diamo la seguente:

Definizione 42 : Date due matrici quadrate $\mathbb{A}_n$ e $\mathbb{B}_n$, esse si dicono **simili** se esiste una matrice quadrata non singolare $\mathbb{P}$ tale che:
$\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}$, o, equivalentemente, tale che: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{B}$.
Indicheremo due matrici $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ che risultano simili con il simbolo $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$.

Vediamo che la similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.
-Vale la proprietà riflessiva: $\forall\,\mathbb{A}$: $\mathbb{A} \sim \mathbb{A}$.
Infatti basta prendere $\mathbb{P} = \mathbb{I}_n$.
-Vale la proprietà simmetrica: $\mathbb{A} \sim \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \sim \mathbb{A}$.
Infatti, da $\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P} \;\Rightarrow \mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1}$; ponendo $\mathbb{P}^{-1} = \mathbb{Q}$, da cui $\mathbb{P} = \mathbb{Q}^{-1}$, otteniamo: $\mathbb{A} = \mathbb{Q}^{-1} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{Q}$, ovvero $\mathbb{B} \sim \mathbb{A}$.
-Vale infine la proprietà transitiva: $((\mathbb{A} \sim \mathbb{B})$ **e** $(\mathbb{B} \sim \mathbb{C}\,)) \Rightarrow \mathbb{A} \sim \mathbb{C}$.
Se $\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}$ e se $\mathbb{C} = \mathbb{Q}^{-1} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{Q}$, sostituendo, otteniamo:
$\mathbb{C} = \mathbb{Q}^{-1} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{-1} \cdot \left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}\right) \cdot \mathbb{Q} = (\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q})^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot (\mathbb{P} \cdot \mathbb{Q})$.
Posto $\mathbb{S} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{Q}$ avremo allora: $\mathbb{C} = \mathbb{S}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{S}$, ovvero $\mathbb{A} \sim \mathbb{C}$.

Un'altra proprietà importante è contenuta nel seguente:
Teorema 22 : Due matrici simili hanno uguale determinante.
Dimostrazione: Se $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$ allora $\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}$; applicando il Teorema di Binet avremo:
$|\mathbb{B}| = \left|\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}\right| = \left|\mathbb{P}^{-1}\right| \cdot |\mathbb{A}| \cdot |\mathbb{P}|$ ed essendo $\left|\mathbb{P}^{-1}\right| = \dfrac{1}{|\mathbb{P}|}$ segue la tesi. ●
E vale anche il
Teorema 23 : Se $\mathbb{A} \sim \mathbb{B}$ allora $\mathbb{A}^k \sim \mathbb{B}^k,\, k \in \mathbb{N}$.
Dimostrazione: Da $\mathbb{B} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}$ otteniamo:
$\mathbb{B}^k = \left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}\right) \cdot \left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}\right) \cdot ... \cdot \left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}\right) =$ per la proprietà associativa
$\mathbb{B}^k = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \left(\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^{-1}\right) \cdot \mathbb{A} \cdot ... \cdot \mathbb{A} \cdot \left(\mathbb{P} \cdot \mathbb{P}^{-1}\right) \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A}^k \cdot \mathbb{P}$ da cui la tesi.

AUTOVALORI ED AUTOVETTORI
Data un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbb{A}_n \cdot \mathbb{X}_{n,1} = \mathbb{Y}_{n,1}$, vogliamo determinare se esistono vettori $\mathbb{X}$ la cui immagine in tale applicazione risulti proporzionale ad $\mathbb{X}$, ovvero sia tale che: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda\,\mathbb{X}$, con λ scalare (reale o complesso).
Imporre $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda\,\mathbb{X}$ equivale ad imporre $(\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}) \cdot \mathbb{X} = \mathbb{O}$, ovvero a risolvere un sistema lineare omogeneo nelle incognite $\mathbb{X}$ avente tra i suoi coefficienti il parametro λ.
Il vettore $\mathbb{X} = \mathbb{O}$ è sempre una soluzione di questo sistema, ma l'interesse è rivolto ovviamente alla presenza di altre soluzioni diverse da quella nulla.
Per questo, essendo la matrice $\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}$ quadrata, imponiamo che sia nullo il suo Determinante, cioè $|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = 0$, altrimenti, per il Teorema di Cramer, il sistema omogeneo avrebbe una sola soluzione, quella nulla.
L'equazione $\mathcal{P}_n(\lambda) = |\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = 0$ è un'equazione di tipo polinomiale di grado n nell'incognita λ; per il Teorema fondamentale dell'algebra essa ammette esattamente n radici, che potranno essere reali o complesse, semplici o multiple. Se la matrice $\mathbb{A}$ è ad elementi reali, le eventuali radici complesse saranno sempre in numero pari, ogni radice complessa essendo presente con la sua coniugata.

Le radici dell'equazione $\mathcal{P}_n(\lambda) = |\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = 0$ sono dette **autovalori** della matrice $\mathbb{A}$; un vettore $\mathbb{X} \neq \mathbb{O}$ tale che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda\,\mathbb{X}$ viene detto **autovettore** relativo all'autovalore λ.
Il polinomio $\mathcal{P}_n(\lambda)$ viene detto **polinomio caratteristico**; le m radici $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\}$, con $m \leq n$ a causa delle eventuali radici multiple, costituiscono il cosiddetto **spettro** della matrice $\mathbb{A}$; il valore $\rho = \text{Max}\,\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, ..., |\lambda_m|\}$, dove $|\lambda_i|$ rappresenta il valore assoluto se λ_i è reale mentre è il modulo se λ_i è complesso, viene detto **raggio spettrale**.

La molteplicità di una radice λ del polinomio caratteristico viene detta **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ e viene indicata con m^a_λ. Ovviamente, detti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m,\ m \le n$, gli autovalori semplici e multipli della matrice $\mathbb{A}$, vale la: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} m^a_{\lambda_i} = n$.

Esempio 78 : Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}$, determiniamone gli autovalori ed i relativi autovettori. Ponendo $|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$ si ha:
$\mathcal{P}_2(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, per $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.
Il valore 4 rappresenta il raggio spettrale della matrice.
Per trovare gli autovettori relativi a $\lambda_1 = -1$ si risolve il sistema $(\mathbb{A} - (-1)\cdot\mathbb{I})\cdot\mathbb{X} = \mathbb{O}$, e quindi: $\begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \mathbb{O}$, ovvero l'equazione $2x_1 + 2x_2 = 0$, risolta per $x_2 = -x_1$.
Tutti i vettori $\mathbb{X}_1 = (k, -k)$ sono quindi tali che: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k \\ -k \end{Vmatrix} = (-1)\cdot \begin{Vmatrix} k \\ -k \end{Vmatrix}$.
Per trovare gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 4$ si risolve il sistema $(\mathbb{A} - 4\cdot\mathbb{I})\cdot\mathbb{X} = \mathbb{O}$, e quindi: $\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix} = \mathbb{O}$, ovvero l'equazione $3x_1 - 2x_2 = 0$, risolta per $x_2 = \dfrac{3}{2}x_1$.
Tutti i vettori $\mathbb{X}_{\mathbf{2}} = \left(k, \dfrac{3}{2}k\right)$ sono tali che: $\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k \\ \frac{3}{2}k \end{Vmatrix} = 4\cdot \begin{Vmatrix} k \\ \frac{3}{2}k \end{Vmatrix}$.

Esempio 79 : Consideriamo la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$ e determiniamone gli autovalori ed i relativi autovettori. Ponendo $|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & -5 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ si ha:
$\mathcal{P}_3(\lambda) = (1-\lambda)\,[(-1-\lambda)\,(3-\lambda) + 5] = (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) = 0$
per $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1 - i$. Abbiamo tre soluzioni semplici, una reale e due complesse, tra loro coniugate.
Dato che $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, questo valore rappresenta il raggio spettrale della matrice.
Determiniamo gli autovettori relativi a $\lambda_1 = 1$.
Si tratta di risolvere il sistema $(\mathbb{A} - 1\cdot\mathbb{I})\cdot\mathbb{X} = \mathbb{O}$, ovvero $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \mathbb{O}$, da cui otteniamo: $\begin{cases} -2x - 5z = 0 \\ 2z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$ che è risolto per $\begin{cases} x = 0 \\ \forall\, y \\ z = 0 \end{cases}$.
Tutti i vettori $\mathbb{X}_1 = (0, k, 0)$ sono quindi tali che: $\begin{Vmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{Vmatrix} = 1\cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ k \\ 0 \end{Vmatrix}$.
Determiniamo ora gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 1 + i$.
Si tratta di risolvere il sistema $\begin{vmatrix} -2-i & 0 & -5 \\ 0 & -i & 2 \\ 1 & 0 & 2-i \end{vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \\ z \end{Vmatrix} = \mathbb{O}$, da cui otteniamo:

$$\begin{cases} (-2-i)\,x - 5z = 0 \\ -i\,y + 2z = 0 \\ x + (2-i)z = 0 \end{cases} \quad \text{che è risolto per} \quad \begin{cases} x = (i-2)\,z \\ y = -2i\,z \end{cases}.$$

I vettori $\mathbb{X}_2 = k\,(i-2, -2i, 1)$ soddisfano quindi all'equazione:

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} i-2 \\ -2i \\ 1 \end{matrix} \right\| = (1+i) \left\| \begin{matrix} i-2 \\ -2i \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Determiniamo infine gli autovettori relativi a $\lambda_3 = 1 - i$.

Risolviamo il sistema $\left| \begin{matrix} -2+i & 0 & -5 \\ 0 & i & 2 \\ 1 & 0 & 2+i \end{matrix} \right| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \mathbb{O}$, da cui otteniamo:

$$\begin{cases} (-2+i)\,x - 5z = 0 \\ i\,y + 2z = 0 \\ x + (2+i)\,z = 0 \end{cases} \quad \text{che è risolto per} \quad \begin{cases} x = -(i+2)\,z \\ y = 2i\,z \end{cases}.$$

I vettori $\mathbb{X}_3 = k\,(-(i+2), 2i, 1)$ soddisfano quindi all'equazione:

$$\left\| \begin{matrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} -(i+2) \\ 2i \\ 1 \end{matrix} \right\| = (1-i) \left\| \begin{matrix} -(i+2) \\ 2i \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

IL POLINOMIO CARATTERISTICO

Definizione 43 : Chiamasi **traccia** della matrice $\mathbb{A}$ la somma degli elementi situati sulla diagonale principale. La traccia si indica con $\mathrm{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Definizione 44 : Data una matrice quadrata $\mathbb{A}_n$, chiamasi **Minore principale** MP il Determinante di una sottomatrice quadrata avente per diagonale principale elementi della diagonale principale di $\mathbb{A}$, ovvero il Determinante di una sottomatrice costituita scegliendo da $\mathbb{A}$ alcune righe e colonne di uguale indice.

Esempio 80 : la matrice $\mathbb{A}_3 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right\|$ ha un solo minore principale del terzo ordine, che è il determinante della matrice stessa: $MP_{123} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right|$; ha tre minori principali del secondo ordine, che sono: $MP_{12} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right|$, $MP_{13} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{matrix} \right|$, $MP_{23} = \left| \begin{matrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right|$; ha tre minori principali del primo ordine, che sono $MP_1 = |a_{11}|$, $MP_2 = |a_{22}|$, $MP_3 = |a_{33}|$.

Gli indici si riferiscono alle righe (e alle colonne) utilizzate per costruire il minore.

Vediamo ora la relazione che sussiste tra i coefficienti del polinomio caratteristico ed i minori principali della matrice $\mathbb{A}$.

Data la matrice $\mathbb{A}_2 = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|$, sarà $\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I} = \left\| \begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{matrix} \right\|$, da cui segue:

$$|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) =$$
$$|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \lambda^2 - (MP_1 + MP_2)\,\lambda + MP_{12} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(\mathbb{A})\,\lambda + \det(\mathbb{A}).$$

Consideriamo ora la matrice del terzo ordine $\mathbb{A}_3 = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$.

Sarà $\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I} = \begin{Vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{Vmatrix}$ da cui otteniamo:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| &= -\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\,\lambda^2 + \\
&- [(a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) + (a_{11}\,a_{33} - a_{13}\,a_{31}) + (a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32})]\,\lambda + \\
&+ (a_{11}\,a_{22}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}) = \\
&= -\lambda^3 + (MP_1 + MP_2 + MP_3)\,\lambda^2 - (MP_{12} + MP_{13} + MP_{23})\,\lambda + MP_{123} = \\
&= -\lambda^3 + \mathrm{tr}(\mathbb{A})\,\lambda^2 - (MP_{12} + MP_{13} + MP_{23})\,\lambda + \det(\mathbb{A})\,.
\end{aligned}$$

Prendiamo spunto da quanto visto nei due esempi precedenti, e formuliamo l'espressione generale del polinomio caratteristico per una matrice quadrata di ordine n qualunque.
Avremo allora:

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = |\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \left(\sum MP^i\right) \lambda^{n-i}\,,$$

dove $\sum MP^i$ rappresenta la somma di tutti i minori principali di ordine i della matrice, avendo posto $MP^0 = 1$. Notiamo che $\sum MP^i$ è una somma di $\binom{n}{i}$ addendi, che $\sum MP^1 = \mathrm{tr}(\mathbb{A})$ e che il termine noto è dato da $MP^n = \det(\mathbb{A})$.

Se scriviamo il polinomio caratteristico fattorizzato mediante le sue radici:

$$\mathcal{P}_n(\lambda) = (-1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)\,,$$

dalla teoria algebrica sappiamo che:

$\mathcal{P}_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \cdot \mathrm{S}_i \cdot \lambda^{n-i}$, dove S_i rappresenta la somma di tutti i possibili prodotti di i radici. Il coefficiente di λ^{n-1} è dato da $(-1)^{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ mentre il termine noto è dato da $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, e da questo discendono le due uguaglianze: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\mathbb{A})$ e $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(\mathbb{A})$.
Da quest'ultima si ricava subito che $\lambda = 0$ è un autovalore se e solo se $\det(\mathbb{A}) = 0$.
Il determinante $\det(\mathbb{A})$ è l'unico minore principale di ordine n ed è uguale al prodotto degli n autovalori. La traccia $\mathrm{tr}(\mathbb{A})$ è la somma di tutti i minori principali di ordine 1 e corrisponde alla somma dei prodotti degli autovalori ad 1 ad 1, ovvero alla somma degli autovalori.
Formalizziamo quanto detto nel seguente:
Teorema 24 : La somma di tutti i minori principali di ordine $n-i$ coincide con la somma di tutti i possibili prodotti di $n-i$ autovalori.

Esempio 81 : Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m \\ 1 & 0 & k \end{Vmatrix}$, determiniamo, al variare di m e k, gli autovalori e la loro molteplicità algebrica. Sarà allora:

$$|\mathbb{A}-\lambda\,\mathbb{I}|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 0 & 1-\lambda & m\\ 1 & 0 & k-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\,[(1-\lambda)(k-\lambda)+1]=$$
$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda\,(k+1)+k+1\right)=0\,.$$

Quindi la matrice ammette l'autovalore $\lambda=1\;\forall\,m\,\mathrm{e}\,\forall\,k$.
Affinchè l'autovalore $\lambda=1$ risulti doppio, dovrà risultare $\lambda^2-(k+1)\,\lambda+k+1=0$ per $\lambda=1$, ovvero: $1-(k+1)+k+1=0$, che non è soddisfatta per nessun valore di k.
Studiamo allora le radici di $\lambda^2-(k+1)\,\lambda+k+1=0$.

Sarà $\lambda=\dfrac{(k+1)\pm\sqrt{(k+1)^2-4(k+1)}}{2}=\dfrac{(k+1)\pm\sqrt{k^2-2k-3}}{2}$.

Se $k^2-2k-3>0$ avremo due autovalori reali e distinti, ambedue diversi da 1 per quanto visto prima;
se $k^2-2k-3<0$ avremo due autovalori complessi e coniugati;
se $k^2-2k-3=0$, ovvero se $k=3$ oppure se $k=\,-1$ avremo un autovalore reale doppio, che si vede con facili calcoli essere $\lambda=2$ per $k=3$ mentre risulta $\lambda=0$ quando $k=\,-1$.

AUTOVALORI DI MATRICI PARTICOLARI

Data una matrice $\mathbb{A}_n$, siano $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ i suoi autovalori, reali o complessi, semplici o multipli. Valgono le seguenti proprietà:
A1) la matrice trasposta $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ ha gli stessi autovalori di $\mathbb{A}$: $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$.
A2) se $|\mathbb{A}|\neq 0$, la matrice inversa $\mathbb{A}^{-1}$ ha per autovalori i reciproci $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},...,\dfrac{1}{\lambda_n}$.
Infatti, se $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\lambda\,\mathbb{X}$ segue: $\mathbb{X}=\mathbb{A}^{-1}\cdot\lambda\,\mathbb{X}$, ovvero $\mathbb{A}^{-1}\cdot\mathbb{X}=\dfrac{1}{\lambda}\,\mathbb{X}$.
A3) la matrice $k\,\mathbb{A}$ ha per autovalori i multipli $k\,\lambda_1,k\,\lambda_2,...,k\,\lambda_n$.
Infatti, se $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\lambda\,\mathbb{X}$, segue subito che: $k\,\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=(k\lambda)\,\mathbb{X}$.
A4) gli autovalori di una matrice diagonale o triangolare coincidono con gli elementi della diagonale principale.
A5) matrici simili hanno lo stesso spettro, uguale determinante ed uguale traccia.
Infatti, se $\mathbb{A}=\mathbb{P}^{-1}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}$, utilizzando il Teorema di Binet, avremo:

$$|\mathbb{A}-\lambda\,\mathbb{I}|=\left|\mathbb{P}^{-1}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}-\lambda\,\mathbb{I}\right|=|\mathbb{P}|\cdot\left|\mathbb{P}^{-1}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}-\lambda\,\mathbb{I}\right|\cdot\left|\mathbb{P}^{-1}\right|=$$
$$=\left|\mathbb{P}\cdot\left(\mathbb{P}^{-1}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}-\lambda\,\mathbb{I}\right)\cdot\mathbb{P}^{-1}\right|=\left|\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}^{-1}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{P}\cdot\mathbb{P}^{-1}-\mathbb{P}\cdot\lambda\cdot\mathbb{I}\cdot\mathbb{P}^{-1}\right|=|\mathbb{B}-\lambda\,\mathbb{I}|\,.$$

Due matrici simili hanno allora uguale polinomio caratteristico, avranno quindi uguali autovalori, e dato che la traccia e il determinante sono il secondo e l'ultimo coefficiente del polinomio caratteristico, saranno uguali, ovvero $\mathrm{tr}(\mathbb{A})=\mathrm{tr}(\mathbb{B})$ e $\det(\mathbb{A})=\det(\mathbb{B})$.
A6) Le matrici ortogonali hanno autovalori, se reali, tutti uguali a ±1.
Infatti, valendo per le matrici ortogonali l'uguaglianza $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}=\mathbb{A}^{-1}$, e vista la proprietà A1), la trasposta $\mathbb{A}^{\mathrm{T}}$ e l'inversa $\mathbb{A}^{-1}$ di una matrice ortogonale hanno gli stessi autovalori della matrice $\mathbb{A}$. Se λ è uno di questi, per la proprietà A2) dovrà anche essere $\lambda=\dfrac{1}{\lambda}$ da cui $\lambda^2=1$ e quindi $\lambda=\pm1$.
A7) Date $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ matrici quadrate dello stesso ordine, la matrice $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$ e la matrice $\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$ hanno gli stessi autovalori.
Date $\mathbb{A}$ matrice rettangolare $(m\cdot n)$ e $\mathbb{B}$ matrice rettangolare $(n\cdot m)$, con $m>n$, la matrice quadrata $\mathbb{C}_m=\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}$ ha gli stessi autovalori della matrice $\mathbb{D}_n=\mathbb{B}\cdot\mathbb{A}$ con l'aggiunta di $m-n$ autovalori uguali a 0.

Infine, se $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono quadrate, anche di ordine diverso, con autovalori rispettivamente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ e $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m$, gli autovalori della matrice $\mathbb{A} \otimes \mathbb{B}$ ottenuta mediante il prodotto di Kronecker sono dati da $\nu_{i,j} = \lambda_i \, \mu_j$, con $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

PROPRIETA' DEGLI AUTOVETTORI

Valgono per gli autovettori le seguenti proprietà:

B1) Se $\mathbb{X}$ è un autovettore corrispondente all'autovalore λ, allora anche $k\,\mathbb{X}, \forall\, k \in \mathbb{R}^*$, è autovettore di $\mathbb{A}$ corrispondente a λ.

Infatti: $\mathbb{A} \cdot (k\,\mathbb{X}) = k\,\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = k\,\lambda\,\mathbb{X} = \lambda\,(k\,\mathbb{X})$;

B2) Uno stesso autovettore non può corrispondere a due autovalori diversi.

Infatti, se fossero vere sia la $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda_1\,\mathbb{X}$ che la $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda_2\,\mathbb{X}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, sottraendo avremo: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} - \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{O} = (\lambda_1 - \lambda_2)\,\mathbb{X}$, e dato che $\mathbb{X} \neq \mathbb{O}$ questo è possibile solo se $\lambda_1 = \lambda_2$, contro l'ipotesi.

B3) Autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m,\ m \leq n$, gli autovalori distinti della matrice $\mathbb{A}_n$ e siano $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_m$ i relativi autovettori. Supponendo che gli autovettori siano linearmente dipendenti, almeno uno di essi, $\mathbb{X}_0$, sarà esprimibile come combinazione lineare di alcuni, anche non tutti, dei rimanenti.

Supponiamo sia $\mathbb{X}_0 = \alpha_1\,\mathbb{X}_1 + \alpha_2\,\mathbb{X}_2 + ... + \alpha_k\,\mathbb{X}_k$, con $k \leq m - 1$.

Premoltiplicando ambedue i termini dell'uguaglianza per la matrice $\mathbb{A}$ otteniamo:

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A} \cdot (\alpha_1\,\mathbb{X}_1 + \alpha_2\,\mathbb{X}_2 + ... + \alpha_k\,\mathbb{X}_k)$ da cui:

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A} \cdot \alpha_1\,\mathbb{X}_1 + \mathbb{A} \cdot \alpha_2\,\mathbb{X}_2 + ... + \mathbb{A} \cdot \alpha_k\,\mathbb{X}_k$ ovvero:

$\lambda_0\,\mathbb{X}_0 = \alpha_1\,\lambda_1\,\mathbb{X}_1 + \alpha_2\,\lambda_2\,\mathbb{X}_2 + \ + \alpha_k\,\lambda_k\,\mathbb{X}_k$,

in quanto $\mathbb{X}_0, \mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_k$ sono autovettori.

Moltiplicando invece ambedue i termini della stessa uguaglianza per λ_0 otteniamo:

$\lambda_0\,\mathbb{X}_0 = \alpha_1\,\lambda_0\,\mathbb{X}_1 + \alpha_2\,\lambda_0\,\mathbb{X}_2 + \ + \alpha_k\,\lambda_0\,\mathbb{X}_k$.

Sottraendo membro a membro avremo infine:

$\mathbb{O} = \alpha_1\,(\lambda_1 - \lambda_0)\,\mathbb{X}_1 + \alpha_2\,(\lambda_2 - \lambda_0)\,\mathbb{X}_2 + \ + \alpha_k\,(\lambda_k - \lambda_0)\,\mathbb{X}_k$,

la quale, essendo $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_k$ indipendenti, implica $\lambda_1 = \lambda_0, \lambda_2 = \lambda_0$,...,$\lambda_k = \lambda_0$ contro l'ipotesi che gli autovalori siano distinti.

B4) Se $\mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1}$ e se $\mathbb{X}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ per la matrice $\mathbb{A}$, allora $\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}$ è un autovettore relativo all'autovalore λ per la matrice simile $\mathbb{B}$.

Infatti, date due matrici $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ simili, e se $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda\,\mathbb{X}$, dalla relazione $\mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1}$ otteniamo: $\lambda\,\mathbb{X} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}$ dalla quale, premoltiplicando per $\mathbb{P}^{-1}$, si ha:

$\mathbb{P}^{-1} \cdot \lambda\,\mathbb{X} = \lambda\,\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{P} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}$,

per cui, posto $\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$, avremo:

$\lambda\left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}\right) = \lambda\,\mathbb{Y} = \mathbb{B} \cdot \mathbb{Y} = \mathbb{B} \cdot \left(\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}\right)$

ovvero che $\mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{X}$ è autovettore della matrice $\mathbb{B}$.

B5) Se $\mathbb{X}_0$ è autovettore della matrice non singolare $\mathbb{A}$ corrispondente all'autovalore λ_0, allora $\mathbb{X}_0$ è anche autovettore della matrice inversa $\mathbb{A}^{-1}$ corrispondente all'autovalore $\dfrac{1}{\lambda_0}$.

Infatti, essendo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \lambda_0 \cdot \mathbb{X}_0$ ed essendo $\mathbb{A}$ invertibile, otteniamo:

$\mathbb{X}_0 = \mathbb{A}^{-1} \cdot \lambda_0 \cdot \mathbb{X}_0 = \lambda_0 \cdot \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{X}_0$ da cui si ha: $\dfrac{1}{\lambda_0} \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A}^{-1} \cdot \mathbb{X}_0$, cioè la tesi.

Esempio 82 : Presa una matrice $\mathbb{A}$, da $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A}$, se $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \lambda_0\,\mathbb{X}_0$ sarà anche:

$\mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A} \cdot \lambda_0\,\mathbb{X}_0 = \lambda_0\,\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \lambda_0^2\,\mathbb{X}_0$, ovvero la matrice $\mathbb{A}^2$ ha per autovalori i quadrati degli autovalori di $\mathbb{A}$, mentre i corrispondenti autovettori sono gli stessi di $\mathbb{A}$.

Esempio 83 : Consideriamo una matrice idempotente, ovvero tale che $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}$.
Da $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0 = \lambda_0 \mathbb{X}_0$ e da $\mathbb{A}^2 \cdot \mathbb{X}_0 = \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_0$ otteniamo: $\lambda_0^2 \mathbb{X}_0 = \lambda_0 \mathbb{X}_0$, che risulta soddisfatta se $\lambda_0 = 0$ oppure se $\lambda_0 = 1$. Quindi gli autovalori di una matrice idempotente possono assumere solo i valori 0 e 1.

AUTOSPAZIO RELATIVO AD UN AUTOVALORE
Data la matrice $\mathbb{A}$ e considerato un suo autovalore λ, che può essere sia semplice che multiplo, vediamo che vale il
Teorema 25 : Gli autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ, con l'aggiunta del vettore nullo $\mathbb{O}$, formano un sottospazio vettoriale, che viene detto **autospazio** relativo all'autovalore λ: $\mathcal{ES}_\lambda$.
Dimostrazione : Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ autovettori relativi ad uno stesso autovalore λ. Quindi:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 = \lambda \mathbb{X}_1$ e $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \lambda \mathbb{X}_2$; da queste segue allora:
$\mathbb{A} \cdot (\alpha \mathbb{X}_1 + \beta \mathbb{X}_2) = \alpha \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 + \beta \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \alpha \lambda \mathbb{X}_1 + \beta \lambda \mathbb{X}_2 = \lambda (\alpha \mathbb{X}_1 + \beta \mathbb{X}_2)$
ovvero anche $\alpha \mathbb{X}_1 + \beta \mathbb{X}_2$ è autovettore relativo a λ. •

Occorre quindi, per ogni autovalore λ_i, determinare la dimensione del relativo autospazio. Tale dimensione è detta **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ_i e verrà indicata con m_i^g.
Preso un autovalore λ_0 della matrice $\mathbb{A}$, determinare tutti gli autovettori relativi a λ_0 significa risolvere il sistema lineare omogeneo $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) \cdot \mathbb{X} = \mathbb{O}$, ovvero determinare il Nucleo dell'applicazione lineare $(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) \cdot \mathbb{X}$.
Quindi avremo intanto la seguente uguaglianza: $m_{\lambda_0}^g = \text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}))$.
Per il Teorema di Sylvester, però, sappiamo che:
$\text{Dim}(\text{Ker}(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})) = n - \text{Car}(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})$
da cui ricaviamo la relazione finale:
$m_{\lambda_0}^g = n - \text{Car}(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I})$.
Dato che $|\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}| = 0$, ne segue $\text{Car}(\mathbb{A} - \lambda_0 \mathbb{I}) \leq n - 1$ e quindi $m_{\lambda_0}^g \geq 1$, per cui:
Teorema 26 : Ad ogni autovalore corrisponde un autospazio la cui dimensione è $m_\lambda^g \geq 1$.
Ovvero: nessun autovalore può avere un autospazio che si riduca ad un punto, cioè a $\mathbb{O}$.

Dalla proprietà B3) sappiamo che autovettori relativi ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti; dal Teorema fondamentale dell'Algebra sappiamo che un'equazione polinomiale di grado n ammette al massimo n radici distinte. Dato che gli autovettori di una matrice $\mathbb{A}_n$ sono vettori di $\mathbb{R}^n$, abbiamo allora i seguenti:
Teorema 27 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ ammette al massimo n autovettori linearmente indipendenti.
Teorema 28 : Se una matrice $\mathbb{A}_n$ ammette n autovalori distinti allora essa ammette n autovettori linearmente indipendenti.

Esempio 84 : Se consideriamo la matrice nulla, avremo: $|\mathbb{O}_n - \lambda \mathbb{I}_n| = (-\lambda)^n = 0$ che ammette la soluzione $\lambda = 0$ multipla di molteplicità $m_0^a = n$.
Dato che $\mathbb{O} \cdot \mathbb{X} = 0 \cdot \mathbb{X} = \mathbb{O}$, $\forall \mathbb{X} \in \mathbb{R}$, l'autospazio relativo all'autovalore 0 coincide con tutto $\mathbb{R}^n$, quindi $m_0^g = n = m_0^a$.
Analogamente per la matrice unità $\mathbb{I}_n$, essendo $|\mathbb{I}_n - \lambda \mathbb{I}_n| = (1 - \lambda)^n = 0$, avremo la soluzione $\lambda = 1$ multipla di molteplicità $m_1^a = n$.
Dato che $\mathbb{I}_n \cdot \mathbb{X} = 1 \cdot \mathbb{X} = \mathbb{X}$, $\forall \mathbb{X} \in \mathbb{R}$, l'autospazio relativo all'autovalore 1 coincide con tutto $\mathbb{R}^n$, quindi $m_1^g = n = m_1^a$.

Esempio 85 : Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, determiniamo l'autospazio relativo a ciascuno dei suoi autovalori.

Sarà $|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{Vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$, equazione che ha per soluzioni $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Quindi $\lambda = 2$ è soluzione semplice mentre $\lambda = 1$ è soluzione doppia.

Per avere l'autospazio relativo a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ si risolve il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Essendo $\text{Car}(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = 2$, la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ è pari a $m_1^g = 3 - \text{Car}(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = 1$, e quindi $1 = m_1^g < m_1^a = 2$. Scartando la seconda riga, si ha il sistema $\begin{cases} -z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ da cui si ricavano gli autovettori $(k, -k, 0) = k\,(1, -1, 0), k \in \mathbb{R}$.

Per trovare l'autospazio relativo a $\lambda_3 = 2$ si risolve il sistema omogeneo $|\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 2 \cdot \mathbb{I}) = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$.

Essendo $\text{Car}(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = 2$, la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda_3 = 2$ è pari a $m_2^g = 3 - \text{Car}(\mathbb{A} - 2 \cdot \mathbb{I}) = 1$, e quindi $m_2^g = m_2^a = 1$. Scartando la prima riga, si ha il sistema $\begin{cases} x + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$ e quindi gli autovettori $(k, -2k, -k) = k\,(1, -2, -1), k \in \mathbb{R}$.

Esempio 86 : Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$, determiniamo l'autospazio relativo a ciascuno dei suoi autovalori.

Sarà $|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \begin{Vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{Vmatrix} = (2-\lambda)\big(\lambda^2 - 6\lambda + 8\big) = 0$ equazione che ha per soluzioni $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$. Quindi $\lambda = 4$ è soluzione semplice mentre $\lambda = 2$ è soluzione doppia.

Per trovare l'autospazio relativo a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ si risolve il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Dato che $\text{Car}(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = 1$, segue che la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 2$ è pari a $m_2^g = 3 - \text{Car}(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = 2$, e quindi $m_2^g = m_2^a = 2$.

Dall'unica equazione rimanente: $x - y + z = 0$ otteniamo gli autovettori $(y - z, y, z)$.

Dato che $m_2^g = 2$, dobbiamo ricavare da questi due vettori indipendenti, che possono essere, ad esempio, $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$.

Ogni autovettore relativo a $\lambda = 2$ si può scrivere come: $k\,(1, 1, 0) + h\,(-1, 0, 1), k, h \in \mathbb{R}$.

Per trovare l'autospazio relativo a $\lambda_3 = 4$ si risolve il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} - 4\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 4\,\mathbb{I}) = \left\|\begin{matrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix}\right\|$.

Dato che $\text{Car}(\mathbb{A} - 4\,\mathbb{I}) = 2$, segue che la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 4$ è pari a $m_4^g = 3 - \text{Car}(\mathbb{A} - 4\,\mathbb{I}) = 1$, e quindi $m_4^g = m_4^a = 1$.

Si risolve infine il sistema $\begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -2y = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ da cui otteniamo $\begin{cases} x = z \\ y = 0 \end{cases}$ e quindi gli autovettori $(k, 0, k) = k\,(1, 0, 1), k \in \mathbb{R}$.

La relazione completa che lega le molteplicità geometrica e algebrica di un qualsiasi autovalore è riassunta nella: $1 \leq m_i^g = n - \text{Car}(\mathbb{A} - \lambda_0\,\mathbb{I}) \leq m_i^a \leq n$, e risulta dal seguente:

Teorema 29 : Per ogni autovalore λ_i vale la relazione: $m_i^g \leq m_i^a$.

Dimostrazione : Sia $\mathbb{A}_n$ una matrice che ammette l'autovalore λ_0, del quale sappiamo che $m_{\lambda_0}^g = k$, mentre non si conosce $m_{\lambda_0}^a$, la sua molteplicità algebrica.

L'autospazio relativo a λ_0 ha dimensione k e quindi esistono k autovettori linearmente indipendenti $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_k$. Formiamo una base di $\mathbb{R}^n$ prendendo i k autovettori $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_k$ assieme ad altri $n - k$ vettori $\mathbb{V}_{k+1}, \mathbb{V}_{k+2}, ..., \mathbb{V}_n$ scelti liberamente.

Sia $\mathbb{W} = \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_k \middle| \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{V}_n\right]$ la matrice avente per colonne i vettori della base che abbiamo costruito.

Sia ora $\mathbb{B}_n = \left[\lambda_0\,\mathbf{e}_1 \middle| \lambda_0\,\mathbf{e}_2 \middle| ... \middle| \lambda_0\,\mathbf{e}_k \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right]$.

Vediamo che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \mathbb{W} \cdot \mathbb{B}$, ovvero che $\mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \mathbb{B}$. Infatti:

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \mathbb{A} \cdot \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_k \middle| \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{V}_n\right] =$

$= \left[\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_k \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right] =$

$= \left[\lambda_0\,\mathbb{X}_1 \middle| \lambda_0\,\mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \lambda_0\,\mathbb{X}_k \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right]$, mentre

$\mathbb{W} \cdot \mathbb{B} = \mathbb{W} \cdot \left[\lambda_0\,\mathbf{e}_1 \middle| \lambda_0\,\mathbf{e}_2 \middle| ... \middle| \lambda_0\,\mathbf{e}_k \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right] =$

$= \left[\mathbb{W} \cdot \lambda_0\,\mathbf{e}_1 \middle| \mathbb{W} \cdot \lambda_0\,\mathbf{e}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{W} \cdot \lambda_0\,\mathbf{e}_k \middle| \mathbb{W} \cdot \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| ... \middle| \mathbb{W} \cdot \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right] =$

$= \left[\lambda_0\,\mathbb{W} \cdot \mathbf{e}_1 \middle| \lambda_0\,\mathbb{W} \cdot \mathbf{e}_2 \middle| ... \middle| \lambda_0\,\mathbb{W} \cdot \mathbf{e}_k \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right] =$

$= \left[\lambda_0\,\mathbb{X}_1 \middle| \lambda_0\,\mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \lambda_0\,\mathbb{X}_k \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+1} \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_{k+2} \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{V}_n\right] = \mathbb{A} \cdot \mathbb{W}$.

Quindi le matrici $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono simili, per cui hanno lo stesso polinomio caratteristico e gli stessi autovalori. Ma $\mathbb{B}_n = \left\|\begin{matrix} \lambda_0 & 0 & ... & 0 & v_{1,k+1} & \cdots & v_{1,n} \\ 0 & \lambda_0 & ... & 0 & v_{2,k+1} & \cdots & v_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_0 & v_{k,k+1} & \cdots & v_{k,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & v_{k+1,k+1} & \cdots & v_{k+1,n} \\ ... & ... & ... & ... & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & v_{n,k+1} & \cdots & v_{n,n} \end{matrix}\right\|$, e quindi:

$|\mathbb{B} - \lambda \cdot \mathbb{I}| = (\lambda_0 - \lambda)^k \cdot \text{P}_{n-k}(\lambda)$. Se risulta $\text{P}_{n-k}(\lambda_0) = 0$, la radice λ_0 avrà una molteplicità algebrica maggiore di k, e quindi sarà $m_{\lambda_0}^g < m_{\lambda_0}^a$. Se invece risultasse $\text{P}_{n-k}(\lambda_0) \neq 0$, sarà allora $m_{\lambda_0}^g = m_{\lambda_0}^a$. •

Esempio 87 : Data la matrice $\mathbb{A} = \left\|\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{matrix}\right\|$, studiamone l'autovalore multiplo e le relative molteplicità. Risulta:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((4-\lambda)(3-\lambda)-2)-(2-\lambda)(2-4+\lambda) =$$

$= (2-\lambda)\big(\lambda^2-8\lambda+12\big) = (2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-6) = 0\,.$

Quindi gli autovalori sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 6\,.$

Per trovare l'autospazio relativo a $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ si risolve il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$.

Dato che $\mathrm{Car}(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = 1$, segue che la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 2$ è pari a $m_2^g = 3 - \mathrm{Car}(\mathbb{A} - 2\,\mathbb{I}) = 2$, e quindi $m_2^g = m_2^a = 2\,.$

Dall'unica equazione rimasta: $x + y + z = 0$ otteniamo gli autovettori $(x, y, \, -x-y)\,.$

Dato che $m_2^g = 2$, dobbiamo ricavare due autovettori indipendenti, che possono essere, ad esempio, $(1, 0, \, -1)$ e $(0, 1, \, -1)$.

Ogni autovettore relativo a $\lambda = 2$ si potrà scrivere come: $k\,(1, 0, \, -1) + h\,(0, 1, \, -1)\,.$

Per completare una base di $\mathbb{R}^3$ scegliamo il vettore $(1, 0, 0)$.

Poniamo allora $\mathbb{W} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}$ e dato che $\mathbb{W}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ avremo:

$$\mathbb{B} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}.$$

Quindi anche $\mathbb{B}$ ammette l'autovalore $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica pari a 2.

Anche per la matrice $\mathbb{A}$ risultava $m_2^g = m_2^a\,.$

Sia invece data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$. Studiamone l'autovalore multiplo e le relative molteplicità. Risulta:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)(1-\lambda)-1) - 1\,(1-2+\lambda) =$$

$= (1-\lambda)\big(\lambda^2-3\lambda+2\big) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2) = 0\,.$

Quindi gli autovalori sono: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2\,.$

Per trovare l'autospazio relativo a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ si risolve il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}| = \mathbb{O}$, che ha per matrice $(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$.

Dato che $\mathrm{Car}(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = 2$, segue che la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 1$ è pari a $m_1^g = 3 - \mathrm{Car}(\mathbb{A} - 1 \cdot \mathbb{I}) = 1$, e quindi $m_1^g = 1 < m_1^a = 2\,.$

Se avessimo seguito la traccia della dimostrazione del Teorema 29, non si sarebbe dovuto trovare che $m_1^a = 2$ mentre $m_1^g = 1$; si sarebbe dovuti partire dall'ipotesi che la dimensione dell'autospazio di $\lambda = 1$ fosse pari ad 1 per poi andare a scoprire quale fosse la sua molteplicità algebrica. Ma questo modo di procedere è puramente teorico e non pratico.

Dalle equazioni $\begin{cases} -z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ricaviamo l'autovettore $(1, \, -1, 0)$.

Per completare una base di $\mathbb{R}^3$ scegliamo i due vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$.

Sarà quindi $\mathbb{W} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$ e dato che $\mathbb{W}^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, avremo:

$$\mathbb{B} = \mathbb{W}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{W} = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Avremo allora: $|\mathbb{B} - \lambda\,\mathbb{I}| = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$, e quindi $m_1^a = 2 > m_1^g = 1$.

Teorema 30 : Se λ_i è radice semplice del polinomio caratteristico, allora $m_i^g = m_i^a = 1$.
Teorema 31 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ ammette esattamente n autovettori linearmente indipendenti se e solo se per ogni autovalore λ_i si ha: $m_i^g = m_i^a$.

MATRICI DIAGONALIZZABILI E TRIANGOLARIZZABILI
La ricerca delle radici del polinomio caratteristico può risultare molto difficoltosa, se non impossibile a meno di fermarsi a valori approssimati, quando l'ordine della matrice risulti abbastanza elevato. Considerato che matrici diagonali e triangolari hanno autovalori immediatamente determinabili e considerato che matrici simili hanno lo stesso spettro, può essere utile poter determinare quando una matrice sia simile ad una matrice diagonale o triangolare.
Parleremo in questo caso di diagonalizzabilità oppure di triangolarizzabilità di una matrice.

Definizione 45 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ si dice **diagonalizzabile** quando è simile ad una matrice diagonale $\mathbb{D}$; analogamente si dice **triangolarizzabile** se è simile ad una matrice triangolare $\mathbb{T}$.
Riprendendo la definizione di matrici simili, avremo i seguenti:
Teorema 32 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ è diagonalizzabile se e solo se esiste una matrice non singolare $\mathbb{P}$ tale che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D}$ oppure, equivalentemente, tale che $\mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{P}^{-1}$, con $\mathbb{D}$ matrice diagonale.
Teorema 33 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ è triangolarizzabile se e solo se esiste una matrice non singolare $\mathbb{P}$ tale che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{T}$ o, equivalentemente, tale che $\mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{T} \cdot \mathbb{P}^{-1}$, con $\mathbb{T}$ matrice triangolare (alta o bassa).

Ricordando che per una matrice ortogonale vale la relazione $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{-1}$, se la diagonalizzazione o la triangolarizzazione avvenissero mediante una matrice $\mathbb{P}$ ortogonale, risulta evidente il risparmio nei calcoli che avremmo calcolando semplicemente $\mathbb{P}^{\mathrm{T}}$ al posto di $\mathbb{P}^{-1}$.

Vediamo allora anzitutto quali sono le matrici diagonalizzabili. Vale il seguente:
Teorema 34 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ risulta diagonalizzabile se e solo se ammette n autovettori linearmente indipendenti.
Dimostrazione: Vediamo che la condizione è sufficiente. Se la matrice $\mathbb{A}$ risulta diagonalizzabile allora esiste, per definizione, una matrice non singolare $\mathbb{P}$ tale che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D}$.
Se diciamo $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ le colonne della matrice non singolare $\mathbb{P}$, esse risultano, per ipotesi, linearmente indipendenti. Dall'uguaglianza $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D}$, detti $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ gli elementi della diagonale principale di $\mathbb{D}$, avremo:
$\mathbb{A} \cdot \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_n\right] = \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_n\right] \cdot \mathbb{D}$, che si può scrivere come:
$\left[\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_n\right] = \left[\lambda_1 \mathbb{X}_1 \middle| \lambda_2 \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \lambda_n \mathbb{X}_n\right]$
dalla quale, uguagliando le colonne, otteniamo:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 = \lambda_1 \mathbb{X}_1,\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \lambda_2 \mathbb{X}_2, ...,\ \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_n = \lambda_n \mathbb{X}_n$.
Questo ci mostra che $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ sono autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, e sono anche indipendenti perchè $\mathbb{P}$ è per ipotesi non singolare.

Verifichiamo poi che la condizione è necessaria. Se $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ sono n autovettori indipendenti, e $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ i relativi autovalori, sia $\mathbb{P}$ la matrice avente $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2, ..., \mathbb{X}_n$ per colonne.
Le n uguaglianze:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 = \lambda_1 \mathbb{X}_1$, $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \lambda_2 \mathbb{X}_2$,..., $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_n = \lambda_n \mathbb{X}_n$
possono essere compattate in forma matriciale nella:
$\left[\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_n\right] = \left[\lambda_1 \mathbb{X}_1 \middle| \lambda_2 \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \lambda_n \mathbb{X}_n\right]$
riscrivibile, detta $\mathbb{D}$ la matrice diagonale avente $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ come elementi della diagonale principale, come:
$\mathbb{A} \cdot \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_n\right] = \left[\mathbb{X}_1 \middle| \mathbb{X}_2 \middle| ... \middle| \mathbb{X}_n\right] \cdot \mathbb{D}$ ovvero $\mathbb{A} \cdot \mathbb{P} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D}$.
Quindi, essendo $\mathbb{P}$ invertibile in quanto ha colonne indipendenti, otteniamo:
$\mathbb{A} = \mathbb{P} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{P}^{-1}$, ovvero che la matrice $\mathbb{A}$ è diagonalizzabile. •

La matrice $\mathbb{P}$, avente per colonne gli autovettori indipendenti di $\mathbb{A}$, è detta **matrice modale**, e fornisce, mediante la $\mathbb{D} = \mathbb{P}^{-1} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{P}$, la procedura per la diagonalizzazione di $\mathbb{A}$.
Dai Teoremi enunciati in precedenza, si deducono allora anche i seguenti:
Teorema 35 : Una matrice $\mathbb{A}_n$ è diagonalizzabile se e solo se $m_i^g = m_i^a$, $\forall$ autovalore λ_i.
Teorema 36 : Se una matrice $\mathbb{A}_n$ ammette n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.

MATRICI TRIANGOLARIZZABILI
Per quanto visto in precedenza, matrici aventi autovalori multipli potrebbero non essere diagonalizzabili. Per almeno un autovalore multiplo potrebbe infatti risultare $m_i^g < m_i^a$.
Per matrici $\mathbb{A}_n$ che non abbiano esattamente n autovettori indipendenti si può allora utilizzare la similitudine con una matrice triangolare, potendosi dimostrare che vale il:
Teorema 37 (di Schur) : Ogni matrice $\mathbb{A}_n$ è simile ad una matrice triangolare alta $\mathbb{T}$. Esiste infatti una matrice ortogonale $\mathbb{U}$ per la quale: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{U} \cdot \mathbb{T}$ ovvero: $\mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{T}$.

MATRICI SIMMETRICHE
Esaminiamo infine il problema della diagonalizzazione nel caso particolare delle matrici simmetriche, ovvero le matrici per le quali: $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}$.
Una prima importante proprietà è illustrata dal seguente:
Teorema 38 : Gli autovalori di una matrice simmetrica sono tutti reali.
Dimostrazione: Sia $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda \mathbb{X}$. Passando ai coniugati avremo : $\overline{\mathbb{A}} \cdot \overline{\mathbb{X}} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}$.
Essendo gli elementi di $\mathbb{A}$ numeri reali, risulta anche $\overline{\mathbb{A}} \cdot \overline{\mathbb{X}} = \mathbb{A} \cdot \overline{\mathbb{X}} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}$.
Se facciamo la trasposta avremo : $\left(\mathbb{A} \cdot \overline{\mathbb{X}}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}\right)^{\mathrm{T}}$ ovvero $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}$.
Essendo $\mathbb{A}$ simmetrica, risulta $\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}$, e quindi sarà anche: $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}$.
Dalla $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda \mathbb{X}$, moltiplicando a sinistra per $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}$ si ha: $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \lambda \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}$;
dalla $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}}$, moltiplicando a destra per $\mathbb{X}$ si ha: $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}$.
Quindi $\lambda \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X} = \overline{\lambda} \overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}$, e dato che $\overline{\mathbb{X}}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X} \neq 0$, segue $\lambda = \overline{\lambda}$, ovvero $\lambda \in \mathbb{R}$. •

Per quanto riguarda gli autovettori, vale il seguente:
Teorema 39 : In una matrice simmetrica, ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali.
Dimostrazione: Siano $\mathbb{X}_1$ ed $\mathbb{X}_2$ due autovettori relativi agli autovalori distinti λ_1 e λ_2.
Allora, dato che il prodotto $\mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2$ rappresenta un numero reale ($k = k^{\mathrm{T}}$), si ha:
$\mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2 = \left(\mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_2\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{X}_1$,
in quanto la matrice è simmetrica, e da questa poi, essendo $\mathbb{X}_1$ ed $\mathbb{X}_2$ autovettori, segue:
$\mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_2 \mathbb{X}_2 = \lambda_2 \mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \lambda_1 \mathbb{X}_1 = \lambda_1 \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1$.

Dato che $\mathbb{X}_1^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1$, in quanto il prodotto scalare dei vettori $\mathbb{X}_1$ ed $\mathbb{X}_2$ ci da un numero reale, otteniamo: $\lambda_1 \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1 = \lambda_2 \mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1$, uguaglianza possibile, essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se e solo se $\mathbb{X}_2^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{X}_1 = 0$, ovvero se $\mathbb{X}_1$ ed $\mathbb{X}_2$ risultano ortogonali. ●

Come prima conseguenza, per i Teoremi precedenti, abbiamo il:
Teorema 40 : Se una matrice simmetrica $\mathbb{A}$ ha gli autovalori tutti distinti, allora esiste una matrice ortogonale $\mathbb{U}$ che la diagonalizza.
Dimostrazione : Se gli autovalori sono tutti distinti, i corrispondenti autovettori non solo sono indipendenti, ma per il precedente Teorema sono anche ortogonali.
Nel costruire la matrice modale basta normalizzare tali autovettori per ottenere una matrice ortogonale $\mathbb{U}$ per la quale: $\mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{U} \cdot \mathbb{D}$. ●

Applicando però ad una matrice simmetrica il Teorema di Schur si perviene ad un risultato ancora più generale, e cioè che ogni matrice simmetrica è sempre diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale. Vale infatti il:
Teorema 41 (spettrale) : Ogni matrice simmetrica è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale.
Dimostrazione: Per il Teorema di Schur ogni matrice $\mathbb{A}_n$ è simile ad una matrice triangolare alta $\mathbb{T}$, ovvero esiste una matrice ortogonale $\mathbb{U}$ per la quale: $\mathbb{T} = \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U}$. Ma, dalla simmetria della matrice $\mathbb{A}$, otteniamo:
$\mathbb{T}^{\mathrm{T}} = \left(\mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{T}$
quindi $\mathbb{T}^{\mathrm{T}} = \mathbb{T}$, cioè la matrice triangolare $\mathbb{T}$ è simmetrica, per cui è una matrice diagonale.
Allora $\mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \mathbb{T} = \mathbb{D}$, ovvero $\mathbb{A}$ è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale. ●

Esempio 88 : Data la matrice simmetrica $\mathbb{A} = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{matrix} \right\|$, determiniamo la matrice ortogonale che la diagonalizza. Cercando le radici del polinomio caratteristico, avremo:

$$|\mathbb{A} - \lambda\,\mathbb{I}| = \left\| \begin{matrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{matrix} \right\| = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0$$

che ammette le radici: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$, radici reali, una doppia e una semplice.
L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ si trova risolvendo il sistema omogeneo:
$|\mathbb{A} - 3\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, ovvero $\left\| \begin{matrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \mathbb{O}$. Essendo $\mathrm{Car}(\mathbb{A} - 3\,\mathbb{I}) = 1$, la dimensione dell'autospazio relativo a $\lambda = 3$ è pari a $m_3^g = 3 - \mathrm{Car}(\mathbb{A} - 3\,\mathbb{I}) = 2$, e quindi $m_3^g = m_3^a = 2$. Ovviamente, in quanto la matrice è simmetrica.
Dall'unica equazione rimanente: $x - y + 2z = 0$ otteniamo $x = y - 2z$, e quindi gli autovettori $(y - 2z, y, z)$.
Essendo $m_3^g = 2$, dobbiamo avere due vettori indipendenti; se scegliamo $y = 1$ e $z = 0$ il primo sarà $\mathbb{X}_1 = (1, 1, 0)$; per scegliere il secondo dobbiamo ricordare che stiamo cercando autovettori ortogonali. Imponendo che sia $(1, 1, 0) \cdot (y - 2z, y, z) = 0$ ricaviamo la condizione $z = y$ per cui l'altro autovettore sarà, scegliendo $y = 1$, $\mathbb{X}_2 = (-1, 1, 1)$.
L'autospazio relativo all'autovalore $\lambda_3 = -3$ si trova risolvendo il sistema omogeneo:

$|\mathbb{A} + 3\,\mathbb{I}| = \mathbb{O}$, ovvero $\left\| \begin{matrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| = \mathbb{O}$. Essendo $\lambda = -3$ radice semplice, la dimensione dell'autospazio relativo sarà pari ad 1. Il sistema omogeneo diviene:

$\begin{cases} 5x + y - 2z = 0 \\ x + 5y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$ che ha per soluzioni $\begin{cases} x = -y \\ z = -2y \end{cases}$.

Tra gli autovettori $(-y, y, -2y)$ scegliamo $\mathbb{X}_3 = (1, -1, 2)$, e vediamo che risulta perpendicolare ad ambedue gli autovettori relativi a $\lambda = 3$. Per avere la matrice modale ortogonale che diagonalizza la matrice simmetrica $\mathbb{A}$ occorre infine normalizzare i tre autovettori trovati, per cui sarà $\mathbb{P} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right\|$ la matrice modale richiesta.

Risulterà allora:

$$\mathbb{U}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbb{A} \cdot \mathbb{U} = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{matrix} \right\| = \mathbb{D}.$$