Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA 13/12/2022

I M 1) Sapendo che $e^z = e\,(\cos 1 - i\,\text{sen}\,1)$, limitandosi al valore principale, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

Da $e^{x+iy} = e^x\,(\cos y + \text{sen}\,y)$ otteniamo $e^z = e\,(\cos 1 - i\,\text{sen}\,1) = e\,(\cos(-1) + i\,\text{sen}(-1))$ e quindi: $z = 1 - i$.

Da $z = 1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{4}\right)$ avremo infine:

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{12} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\dfrac{7\pi}{12} + k\,\dfrac{2\pi}{3}\right)\right), 0 \le k \le 2$ da cui:

per $k = 0 : z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{7\pi}{12}\right)$;

per $k = 1 : z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{15\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

per $k = 2 : z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\dfrac{23\pi}{12} + i\,\text{sen}\,\dfrac{23\pi}{12}\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\cos^3\vartheta + \varrho^3\,\text{sen}^3\,\vartheta}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\vartheta + \text{sen}^3\,\vartheta\right) = 0$ con convergenza uniforme in quanto $\left|\cos^3\vartheta + \text{sen}^3\,\vartheta\right| \le 2$. Quindi la funzione è continua in $(0,0)$. Avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3+0}{h^2+0} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0+h^3}{0+h^2} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,1)$.

Per la differenziabilità dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (1,1)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - x - y\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3-x^3-xy^2-x^2y-y^3}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2-x^2y}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari avremo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2-x^2y}{(x^2+y^2)\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{-\varrho^3\,(\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta)(\cos\vartheta + \text{sen}\,\vartheta)}{\varrho^3} =$$

$= -(\cos\vartheta\,\text{sen}\,\vartheta)(\cos\vartheta + \text{sen}\,\vartheta) = 0$ solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data la funzione $f(x,y) = x - e^{y-x}$, determinare i versori $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ per i quali risulta nulla $\mathcal{D}_v f(1,1)$.

La funzione, essendo una composizione di esponenziali e polinomi, è differenziabile $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Da $\nabla f(x,y) = (1 + e^{y-x};\, - e^{y-x})$ otteniamo $\nabla f(1,1) = (2;\, -1)$ e quindi :
$D_v f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = (2;\, -1) \cdot (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha) = 2\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0$ da cui:
$\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$ e dalla $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ sostituendo si ha $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ovvero:
$5\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ed essendo $\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$ avremo i due versori:
$v_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ e $v_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

I M 4) Verificare che con l'equazione $f(x,y,z) = xe^z - 2ye^x + ze^y = 0$, soddisfatta nel punto $P = (1,1,1)$, si può definire implicitamente una funzione $z = z(x,y)$. Determinare $\mathrm{d}z$ e calcolare poi $\mathrm{d}^2 z$.

La funzione, essendo una composizione di esponenziali e polinomi, è ovunque differenziabile.
Essendo $\nabla f(x,y,z) = (e^z - 2ye^x;\, -2e^x + ze^y; xe^z + e^y)$ si ha $\nabla f(1,1,1) = (-e;\, -e; 2e)$.
Essendo $f'_z(1,1,1) \neq 0$ è quindi possibile definire una funzione implicita $z = z(x,y)$.
Sarà poi $\nabla z(x,y) = \left(z'_x; z'_y\right) = \left(-\dfrac{-e}{2e}; -\dfrac{-e}{2e}\right) = \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Quindi $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y$. Essendo poi $\mathbb{H}(x;y;z) = \left\|\begin{matrix} -2ye^x & -2e^x & e^z \\ -2e^x & ze^y & e^y \\ e^z & e^y & xe^z \end{matrix}\right\|$ avremo poi:

$\mathbb{H}(1,1,1) = \left\|\begin{matrix} -2e & -2e & e \\ -2e & e & e \\ e & e & e \end{matrix}\right\|$. Applicando la formula $\mathrm{d}^2 z = -\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x,y,z)}{f'_z(1,1,1)}$ avremo:

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{-2e\,(\mathrm{d}x)^2 + e\,(\mathrm{d}y)^2 + e\,(\mathrm{d}z)^2 - 4e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2e\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{2e}$$ nella quale, operando la sostituzione $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}y$ otteniamo infine:

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{\left(-2e + \frac{1}{4}e + e\right)(\mathrm{d}x)^2 + \left(e + \frac{1}{4}e + e\right)(\mathrm{d}y)^2 + \left(\frac{1}{2}e - 4e + e + e\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2e} =$$

$$\mathrm{d}^2 z = -\frac{-\frac{3}{4}e\,(\mathrm{d}x)^2 + \frac{9}{4}e\,(\mathrm{d}y)^2 - \frac{3}{2}e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{2e} = \frac{3}{8}\,(\mathrm{d}x)^2 - \frac{9}{8}\,(\mathrm{d}y)^2 + \frac{3}{4}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

I M 5) Sapendo che la funzione $f(x.y) = e^{y^2 - x}$ é differenziabile nel punto $(1;1)$, calcolare un valore approssimato di $f(1,1;0,9)$ mediante l'opportuno polinomio di II grado.

Usiamo la formula del Polinomio di Taylor di II grado:
$$f(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X}_0) + \nabla f(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) + \frac{1}{2}(\mathbb{X} - \mathbb{X}_0) \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot (\mathbb{X} - \mathbb{X}_0)^{\mathrm{T}} + o\left(\|\mathbb{X} - \mathbb{X}_0\|\right)$$
prendendo come punto base il punto $(1;1)$ ed avremo quindi:
$$f(1,1;0,9) = f(1;1) + \nabla f(1;1) \cdot \mathrm{d}\mathbb{X} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\mathbb{X} \cdot \mathbb{H}(\mathbb{X}_0) \cdot \mathrm{d}\mathbb{X}^{\mathrm{T}} + o\left(\|\mathrm{d}\mathbb{X}\|\right).$$
Essendo $\mathrm{d}\mathbb{X} = \mathbb{X} - \mathbb{X}_0 = (1,1;0,9) - (1;1) = (0,1;\, -0,1) = \left(\frac{1}{10}; -\frac{1}{10}\right)$ ed inoltre:

$\nabla f(x,y) = \Big(- e^{y^2-x}; 2y\, e^{y^2-x} \Big)$ e $\mathbb{H}(x;y) = \left\| \begin{matrix} e^{y^2-x} & -2y\, e^{y^2-x} \\ -2y\, e^{y^2-x} & 2\, e^{y^2-x} + 4y^2\, e^{y^2-x} \end{matrix} \right\|$ sarà poi:

$\nabla f(1;1) = (-1;2)$ e $\mathbb{H}(1;1) = \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{matrix} \right\|$ per avere infine:

$$f(1,1;0,9) = e^{(0.9)^2-1,1} = e^{0,81-1,1} = e^{-0,29} \cong$$

$$\cong e^{1-1} + (-1;2) \cdot \left(\frac{1}{10}; -\frac{1}{10} \right) + \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} \end{matrix} \right\| =$$

$$= 1 - \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{8}{10} \end{matrix} \right\| = \frac{7}{10} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{100} + \frac{8}{100} \right) = \frac{7}{10} + \frac{11}{200} = \frac{140+11}{200}\,.$$

Quindi $e^{-0,29} \cong \dfrac{151}{200} = 0,755\,.$