COMPITO di ANALISI MATEMATICA 11/01/2023

I M 1) Dopo aver trovato le otto radici dell'equazione $\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right)=0$, detta z la loro somma, calcolare e^z.

$\left(x^4-1\right)=\left(x^2+1\right)\left(x^2-1\right)=0 \Rightarrow x^2+1=0$ oppurre $x^2-1=0$;
$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\pm i$; $x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$;
$x^4+1=0 \Rightarrow x^4=-1 \Rightarrow x=\sqrt[4]{-1}$; da $-1=\cos\pi+i\,\text{sen}\,\pi$ segue:
$\sqrt[4]{-1}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\,\frac{2\pi}{4}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+k\,\frac{2\pi}{4}\right)$, $0\le k\le 3$:
Per $k=0$: $\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
Per $k=1$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
Per $k=2$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)=\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{5\pi}{4}=-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$;
Per $k=3$: $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)=\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Quindi $z=i-i+1-1+\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\,\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-i\,\frac{1}{\sqrt{2}}=0$
per cui $e^z=e^0=1$.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^6-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^6-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^6-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\varrho^6\left(\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right)}{\varrho^4}=\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho^2\left(\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right)=0$; la convergenza è uniforme in quanto $\left|\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right|\le 2$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$. Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h^6-0}{\left(h^2+0\right)^2}-0\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}h=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{0-h^6}{\left(0+h^2\right)^2}-0\right)\cdot\frac{1}{h}=\lim_{h\to 0}(-h)=0.$$

Quindi $\nabla f(0,0)=(0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0$ ovvero se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^6-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$. Passando a coordinate polari otteniamo:
$\lim\limits_{\varrho\to 0}\dfrac{\varrho^6\left(\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right)}{\varrho^5}=\lim\limits_{\varrho\to 0}\varrho\left(\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right)=0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\cos^6\vartheta-\text{sen}^6\,\vartheta\right|\le 2$ e quindi la funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = xz - yz + x^2 - y^2 = 0 \\ g(x,y,z) = x^2yz^2 - xy^2z^3 = 0 \end{cases}$, ed il punto $\mathrm{P} = (1,1,1)$, determinare quale tipo di funzione implicita $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sia possibile definire con tale sistema, e di questa calcolare le derivate prime nel punto opportuno.

Calcoliamo la matrice Jacobiana :
$\mathbb{J} = \dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \left\| \begin{matrix} z+2x & -z-2y & x-y \\ 2xyz^2 - y^2z^3 & x^2z^2 - 2xyz^3 & 2x^2yz - 3xy^2z^2 \end{matrix} \right\|$ da cui:
$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \left\| \begin{matrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{matrix} \right\|$.
Essendo $\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ non si può definire una funzione implicita $z \to (x(z), y(z))$;
essendo $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $y \to (x(y), z(y))$;
essendo $\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $x \to (y(x), z(x))$.
Scegliendo quest'ultima funzione avremo le sue derivate:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{-3}{3} = 1; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{3} = 0.$$

I M 4) Data $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z}$, calcolare $\mathcal{D}_v f(0,0,0)$, dove v è il versore del vettore $(1,-1,1)$. Determinare poi l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado di tale funzione.

La funzione $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z}$ è ovunque differenziabile due volte, ed avremo:
$\|1,-1,1\| = \sqrt{3}$ e quindi $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
Dato che $\mathcal{D}_v f(0,0,0) = \nabla f(0,0,0) \cdot v$ essendo :
$\nabla f(x,y,z) = \left(e^{y-z} - y\,e^{x-z}, x\,e^{y-z} - e^{x-z}, -x\,e^{y-z} + y\,e^{x-z}\right)$ sarà allora:
$\nabla f(0,0,0) = (1,-1,0)$ e quindi $\mathcal{D}_v f(0,0,0) = (1,-1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.
Passiamo a determinare:
$P_2(x,y,z) = f(0,0,0) + \nabla f(0,0,0) \cdot (x,y,z) + \frac{1}{2}(x,y,z) \cdot \mathbb{H}(0,0,0) \cdot (x,y,z)^T$.
Si ha $f(0,0,0) = 0$; poi $\nabla f(0,0,0) \cdot (x,y,z) = (1,-1,0) \cdot (x,y,z) = x - y$;
da $\mathbb{H}(x,y,z) = \left\| \begin{matrix} -y\,e^{x-z} & e^{y-z} - e^{x-z} & -e^{y-z} + y\,e^{x-z} \\ e^{y-z} - e^{x-z} & x\,e^{y-z} & -x\,e^{y-z} + e^{x-z} \\ -e^{y-z} + y\,e^{x-z} & -x\,e^{y-z} + e^{x-z} & x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z} \end{matrix} \right\|$ segue:
$\mathbb{H}(0,0,0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$ e quindi:

$$(x,y,z) \cdot \mathbb{H}(0,0,0) \cdot (x,y,z)^T = \| x \quad y \quad z \| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \right\| =$$

$$= \| x \quad y \quad z \| \cdot \left\| \begin{matrix} -z \\ z \\ -x+y \end{matrix} \right\| = -xz+yz-xz+yz = -2xz+2yz$$ per avere quindi:

$$P_2(x,y,z) = 0 + (x-y) + \frac{1}{2}\,(-2xz+2yz) = x-y-xz+yz\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x\,y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2-2x-y \le 0 \\ y-2x \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} y = x^2-2x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x = x\,(x-4) = 0 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}.$$

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2) = x\,y - \lambda_1\big(x^2-2x-y\big) - \lambda_2(y-2x)\,.$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x^2-2x \le y \\ y \le 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0 \le 0 \\ 0 \le 0 \end{cases}.$$ Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$, da $|\mathbb{H}_2| < 0$ segue che $(0,0)$, come estremo libero, sarebbe un punto di sella, ma nel problema è un punto di frontiera e verrà riesaminato nel seguito.

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2-2x \\ y \le 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = 2\lambda_1 x - 2\lambda_1 \\ y = x^2-2x \\ y \le 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 = \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \\ y \le 2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\lambda_1 \\ y = -2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1^2 + 4\lambda_1 = \lambda_1(3\lambda_1+4) = 0 \\ y \le 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 \le 0 : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{8}{9} \\ \lambda_1 = -\frac{4}{3} \\ -\frac{8}{9} \le \frac{8}{3} : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $P_1 : (0,0)$, con $\lambda_1 = 0$ rimane un punto da controllare, il punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ con $\lambda_1 = -\frac{4}{3} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + 2\lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - \lambda_2 = 0 \\ y = 2x \\ x^2 - 2x \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda_2 \\ y = -2\lambda_2 \\ -2\lambda_2 = 2\lambda_2 \\ x^2 - 2x \le y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 \le 0 : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $(0,0)$ rimane un punto da controllare.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - 2\lambda_1 x + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 2x \\ y = 2x \end{cases} \quad \text{dato che} \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 4 \\ y = 8 \end{cases} :$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

. Il punto $(0,0)$ rimane un punto da controllare.

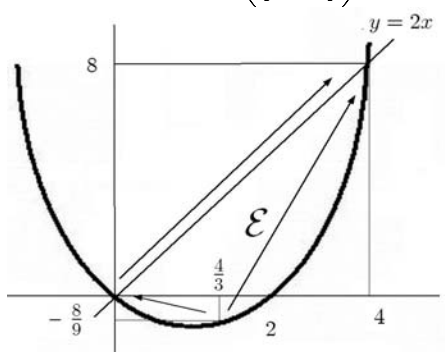
$$\begin{cases} 8 - 8\lambda_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 4 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\lambda_1 - 2(4 + \lambda_1) = 8 \\ \lambda_2 = 4 + \lambda_1 \\ x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 = 16 \\ \lambda_2 = 4 + \lambda_1 \\ x = 4 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 8 \\ x = 4 \\ y = 8 \end{cases}.$$

Il punto $(4,8)$ con $\lambda_1 = 4 > 0$ e $\lambda_2 = 8 > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

Essendo emersi due soli candidati, per il Teorema di Weierstrass il punto $(4,8)$, con $f(4,8) = 32$ sarà il punto di Massimo mentre il punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right)$, con $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right) = -\frac{32}{27}$ sarà il punto di minimo.

Per completezza, studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.
Se $y = 2x$ risulta $f(x,x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Quindi $f'(x) = 2x \ge 0$ per $x \ge 0$ per cui il punto $(0,0)$ con $f(0,0) = 0$ risulta un punto di minimo relativamente ai soli punti della retta $y = 2x$ ma basta esaminare la regione $\mathcal{E}$ per vedere come in ogni intorno di (0.0) ci sono punti in cui $f(x,y)$ è positiva e punti in cui è negativa, per cui $(0,0)$ non è nè punto di massimo nè punto di minimo.

Se $y = x^2 - 2x$, risulta $f\left(x, x^2 - 2x\right) = x^3 - 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4) > 0$ per $x < 0$ e per $x > \frac{4}{3}$, che conferma il punto $\left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{9}\right)$ come punto di minimo.



II M 2) Risolvere il problema: $\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Avendosi $y' = 1 + x + y + xy = 1 + x + y\,(1 + x) = (1 + x)(1 + y)$ l'equazione differenziale data è del tipo a variabili separabili e quindi avremo:
$\dfrac{1}{1+y}\,y' = 1 + x$ da cui, integrando $\displaystyle\int \frac{1}{1+y}\,\mathrm{d}y = \int 1 + x\,\mathrm{d}x + k$ e quindi:
$\log|1+y| = x + \dfrac{x^2}{2} + k \Rightarrow |1+y| = e^{x+\frac{x^2}{2}+k} \Rightarrow 1 + y = m\,e^{x+\frac{x^2}{2}}, m \in \mathbb{R}$ e quindi:
$y = m\,e^{x+\frac{x^2}{2}} - 1$ è la soluzione generale dell'equazione.
Da $y(0) = 1$ otteniamo $m - 1 = 1$ e quindi $m = 2$ da cui la soluzione particolare:
$y_0 = 2\,e^{x+\frac{x^2}{2}} - 1$.

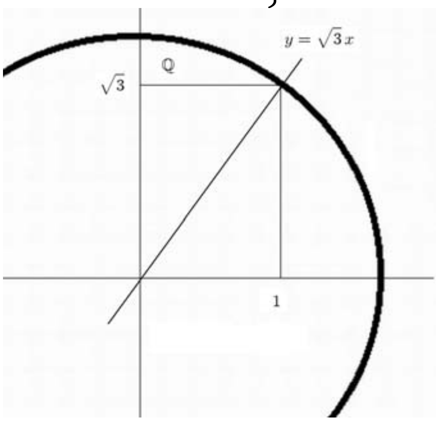
II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t \\ y' = -x + y - e^t \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

$\begin{cases} x' = 3x + y + e^t \\ y' = -x + y - e^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - 3x - y = e^t \\ x + y' - y = -e^t \end{cases} \Rightarrow \left\|\begin{matrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix} e^t \\ -e^t \end{matrix}\right\| \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-3 & -1 \\ 1 & D-1 \end{vmatrix}(x) = \begin{vmatrix} e^t & -1 \\ -e^t & D-1 \end{vmatrix} \Rightarrow \big(D^2 - 4D + 4\big)(x) = e^t - e^t - e^t \Rightarrow$
$\Rightarrow x'' - 4x' + 4x = -e^t$.
Da $x'' - 4x' + 4x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ e quindi la soluzione doppia $\lambda = 2$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà:
$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\,t\,e^{2t}$.
Passando alla soluzione dell'equazione non omogenea, possiamo ipotizzare una soluzione particolare del tipo : $x_0 = ae^t$.
Sarà quindi $x_0' = x_0'' = ae^t$ da cui sostituendo:
$ae^t - 4ae^t + 4ae^t = ae^t = -e^t$ da cui $a = -1$ e quindi la soluzione generale della non omogenea per $x(t)$ sarà: $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\,t\,e^{2t} - e^t$.
Dalla $x' = 3x + y + e^t$ otteniamo $y(t) = x' - 3x - e^t$ e quindi:
$y(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2\,e^{2t} + 2c_2\,t\,e^{2t} - e^t - 3c_1 e^{2t} - 3c_2\,t\,e^{2t} + 3e^t - e^t \Rightarrow$
$y(t) = -c_1 e^{2t} + c_2\,e^{2t} - c_2\,t\,e^{2t} + e^t = -c_1 e^{2t} + c_2\,(1-t)e^{2t} + e^t$
e quindi la soluzione generale:
$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} + c_2\,t\,e^{2t} - e^t \\ y(t) = -c_1 e^{2t} + c_2\,(1-t)e^{2t} + e^t \end{cases}$.
Imponendo le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$ otteniamo $\begin{cases} x(0) = c_1 - 1 = 1 \\ y(0) = -c_1 + c_2 + 1 = -1 \end{cases}$ da cui:
$\begin{cases} c_1 = 2 \\ -2 + c_2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 0 \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare:
$\begin{cases} x(t) = 2e^{2t} - e^t \\ y(t) = -2e^{2t} + e^t \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, con $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x; \sqrt{3} \le y; x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

Vista la regione di integrazione:

$$\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x; \sqrt{3} \le y; x^2 + y^2 \le 4\right\}$$



l'equazione $x^2 + y^2 = 4$ rappresenta una circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio pari a 2, la retta di equazione $y = \sqrt{3}\,x$ forma un angolo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ con l'asse x.
Da $x^2 + y^2 = 4$ se $y = \sqrt{3}$ segue $x = 1$.
Possiamo calcolare l'integrale in due modi: vedendo la regione come normale rispetto all'asse x oppure utilizzando le coordinate polari.
Usando il primo modo avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} xy \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2}\right|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2}\left(4 - x^2 - 3\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{2}\left(1 - x^2\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) - 0 = \frac{1}{8}.$$

Passando invece a coordinate polari : $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$, avremo:

$$\left|J\,\frac{(x,y)}{(\rho,\vartheta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \\ \mathrm{sen}\,\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho,$$ la circonferenza $x^2 + y^2 = 4$ ha in coordinate polari equazione $\varrho = 2$; da $y = \sqrt{3} \Rightarrow \varrho\,\mathrm{sen}\,\vartheta = \sqrt{3} \Rightarrow \varrho = \dfrac{\sqrt{3}}{\mathrm{sen}\,\vartheta}$. Quindi:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}^{2} \varrho^2 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \varrho \,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}^{2} \varrho^3 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\varrho^4}{4}\right|_{\frac{\sqrt{3}}{\mathrm{sen}\,\vartheta}}^{2} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - \frac{9}{4\,\mathrm{sen}^4\vartheta}\right)\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta - \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{9}{4}\,\mathrm{sen}^{-3}\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left(4\,\frac{\mathrm{sen}^2\vartheta}{2}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{-3+1}\,\mathrm{sen}^{-2}\vartheta\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(2\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{9}{8}\,\frac{1}{\mathrm{sen}^2\vartheta}\right|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 2\left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{9}{8}\left(1 - \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{1}{8}.$$