COMPITO di MATEMATICA GENERALE 11/01/2023

Compito $\mathbb{A}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^3 \log^2 x$.

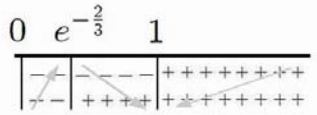
C.E.: $x > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^3 \log^2 x = \lim\limits_{x\to 0^+} x\,(x\log x)(x\log x) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3 \log^2 x = +\infty$.

$f(x) \geq 0\ \forall\, x > 0$; $f(x) = 0$ per $x = 1$.

$$f'(x) = 3x^2 \cdot \log^2 x + x^3 \cdot 2 \cdot \log x \cdot \frac{1}{x} = x^2 \cdot \log x\,(3\log x + 2) \geq 0$$

$\log x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$3\log x + 2 \geq 0 \Rightarrow \log x \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow x \geq e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$



$f(x)$ risulta crescente per $0 < x < e^{-\frac{2}{3}}$ e per $1 < x$, decrescente per $e^{-\frac{2}{3}} < x < 1$. Dato che la funzione è continua $\forall\, x > 0$ in $x = e^{-\frac{2}{3}}$ abbiamo un punto di massimo, in $x = 1$ invece un punto di minimo.

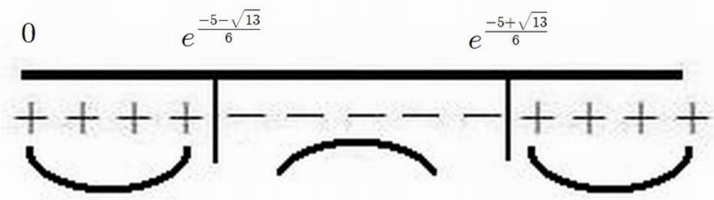
Da $f'(x) = 3x^2 \log^2 x + 2x^2 \log x$ avremo poi:

$$f''(x) = 6x\log^2 x + 6x^2 \log x \cdot \frac{1}{x} + 4x\log x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\left(3\log^2 x + 5\log x + 1\right) \geq 0$$

per $3\log^2 x + 5\log x + 1 \geq 0 \Rightarrow \log x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$ e quindi:

$f''(x) \geq 0$ per $\log x \leq \dfrac{-5-\sqrt{13}}{6}$ e per $\log x \geq \dfrac{-5+\sqrt{13}}{6}$ ovvero:

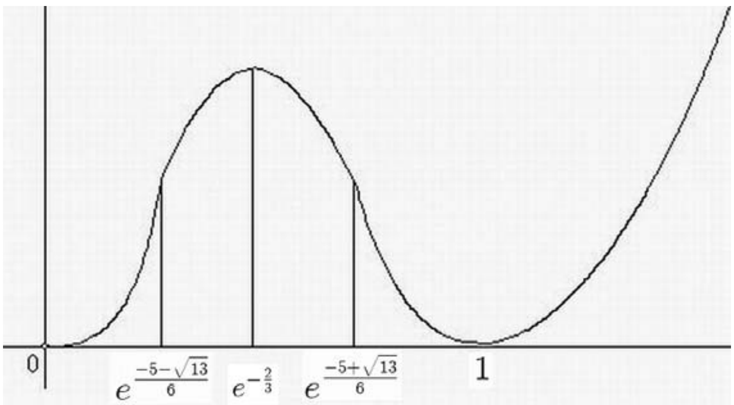
$f''(x) \geq 0$ per $x \leq e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}$ e per $x \geq e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}$.



Funzione convessa in $0 < x < e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}$ e $e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}} < x$, concava in $e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}} < x < e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}$.

In $x = e^{\frac{-5-\sqrt{13}}{6}}$ e in $x = e^{\frac{-5+\sqrt{13}}{6}}$ ci sono due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4+3x}{5+3x}\right)^{1-x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{x^2} \cdot \dfrac{x^2}{1-\cos x} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 1$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{4+3x}{5+3x}\right)^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{5+3x-1}{5+3x}\right)^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(1+\dfrac{-1}{5+3x}\right)^{5+3x}\right]^{\frac{1-x}{5+3x}} =$

$= \left(e^{-1}\right)^{-\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

3) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+kx-2}$, si determinino i valori del parametro k per i quali la funzione ha un punto di discontinuità di III specie, determinando anche i punti di tale discontinuità.

Essendo $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+kx-2} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{x^2+kx-2}$ avremo un punto di discontinuità di III specie se il denominatore x^2+kx-2 si annulla per $x=1$ oppure per $x=2$.
Per $x=1$ avremo $1+k-2=0$ se $k=1$ da cui $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ per cui:
$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$;
per $x=2$ si ha $4+2k-2=0$ se $k=-1$ da cui $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ per cui:
$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1}{3}$.

4) Date le funzioni $f(x) = \log(x+1)$ e $g(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$, determinare Campo d'esistenza ed espressione dell'inversa di $F(x) = f(g(x))$.

Avremo
$F(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \log\left(\dfrac{e^x-1}{e^x+1}+1\right) = \log\left(\dfrac{e^x-1+e^x+1}{e^x+1}\right) \Rightarrow$
$F(x) = \log\left(\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right)$. Dato che $\dfrac{2e^x}{e^x+1} > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, avremo *C.E.*: $\mathbb{R}$.
Per avere l'espressione della funzione inversa di $F(x)$ poniamo:
$y = \log\left(\dfrac{2e^x}{e^x+1}\right) \Rightarrow \dfrac{2e^x}{e^x+1} = e^y \Rightarrow 2e^x = e^y e^x + e^y \Rightarrow e^x(2-e^y) = e^y \Rightarrow$
$\Rightarrow e^x = \dfrac{e^y}{2-e^y} \Rightarrow x = \log\left(\dfrac{e^y}{2-e^y}\right)$ e quindi $F^{-1}(x) = \log\left(\dfrac{e^x}{2-e^x}\right)$.

5) Calcolare $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} \cdot \log x \, \mathrm{d}x$ mediante integrazione per parti.

Cerchiamo le primitive mediante integrazione per parti:
$\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}} \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} \cdot \log x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x =$

$$= \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} \cdot \log x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} \cdot \log x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{5}{3}-1}\, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} \cdot \log x - \frac{3}{5}\int x^{\frac{2}{3}}\, \mathrm{d}x = \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} \cdot \log x - \frac{3}{5}\,\frac{1}{\frac{2}{3}+1}\, x^{\frac{2}{3}+1} = \frac{3}{5}\, x^{\frac{5}{3}} \cdot \log x - \frac{9}{25}\, x^{\frac{5}{3}} + k\,.$$

6) Data la funzione $f(x) = x^4 \cdot e^x$, determinare gli intervalli dove la funzione risulta convessa e dove concava.

Da $f(x) = x^4 \cdot e^x$ segue $f'(x) = 4x^3 \cdot e^x + x^4 \cdot e^x = e^x\left(x^4 + 4x^3\right)$ e quindi:
$f''(x) = e^x\left(x^4 + 4x^3\right) + e^x\left(4x^3 + 12x^2\right) = e^x\left(x^4 + 8x^3 + 12x^2\right) = e^x x^2\left(x^2 + 8x + 12\right)$.
Quindi $f''(x) \geq 0$ per $x^2 + 8x + 12 \geq 0 \Rightarrow x = -4 \pm \sqrt{16-12} = -4 \pm \sqrt{4} \Rightarrow$
$x = -4-2 = -6$ oppure $x = -4+2 = -2$.
Quindi $f''(x) \geq 0$ per $x < -6$ oppure per $x > -2$.
La funzione è convessa in $]-\infty; -6[$ ed in $]-2; +\infty[$, concava in $]-6; -2[$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^3 - y^2 + 2xy^2 - 3x$.

La funzione è differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x, y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 3x^2 + 2y^2 - 3 = 0 \\ f'_y = 4xy - 2y = 2y\,(2x-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 3(x^2-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$
$$\cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} + 2y^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{9}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm\frac{3}{\sqrt{8}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi quattro punti stazionari:
$P_1 : (1, 0)$, $P_2 : (-1, 0)$, $P_3 : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$, $P_4 : \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.

Da $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 6x & 4y \\ 4y & 4x-2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(1, 0) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 12 > 0 \end{cases}$ segue $(1, 0)$ punto di minimo;

$\mathbb{H}(-1, 0) = \begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases} \Rightarrow (-1, 0)$ punto di massimo;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{Vmatrix} 3 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = -18 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ punto di sella;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \begin{Vmatrix} 3 & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = -18 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$ punto di sella.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$, ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k \\ k \\ k \end{Vmatrix}$, si determini per quali valori di k il modulo del vettore $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta uguale a 7.

$$\mathbb{Y}=\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\left\|\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2&1&0\\0&-1&0\\-1&0&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}k\\k\\k\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}2k+k+0\\0-k+0\\-k+0+k\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{matrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}3k\\-k\\0\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}3k-k+0\\3k+0+0\\0-k+0\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}2k\\3k\\-k\end{matrix}\right\|=\mathbb{Y}$$. Quindi:

$\|\mathbb{Y}\|=\sqrt{(2k)^2+(3k)^2+(-k)^2}=\sqrt{4k^2+9k^2+k^2}=\sqrt{14k^2}=7$ dalla quale si ha:

$14k^2=49\Rightarrow k^2=\frac{49}{14}=\frac{7}{2}\Rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

9) Determinare verità o falsità della proposizione $P:(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ sapendo che la proposizione $P_1:[(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow\mathbb{C}]$ risulta falsa mentre la proposizione $P_2:[(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})\Leftrightarrow\mathbb{B}]$ risulta vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})$	$(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})$	$(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{A}$	$non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1	0

Solo in quarta riga la proposizione $P_1:[(\mathbb{A}\,o\,\mathbb{B})\Rightarrow\mathbb{C}]$ risulta falsa mentre la proposizione $P_2:[(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})\Leftrightarrow\mathbb{B}]$ risulta vera, e sotto queste ipotesi la proposizione $P:(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ risulta falsa.

10) Verificare che se $f(x)$ è una funzione derivabile due volte e concava allora la funzione $F(x)=e^{1-f(x)}$ risulta una funzione convessa.

Da $F(x)=e^{1-f(x)}$ otteniamo $F'(x)=-f'(x)\,e^{1-f(x)}$ e quindi poi:
$F''(x)=-\left(f''(x)\,e^{1-f(x)}+f'(x)(-f'(x))\,e^{1-f(x)}\right)=e^{1-f(x)}\left(-f''(x)+(f'(x))^2\right)$.
Essendo $f(x)$ una funzione concava risulta $f''(x)\leq 0$ e quindi $F''(x)\geq 0\;\forall x$ ovvero la funzione $F(x)=e^{1-f(x)}$ risulta una funzione convessa.