COMPITO di MATEMATICA GENERALE 11/01/2023

Compito $\mathbb{B}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^2 \log^2 x$.

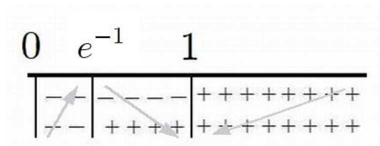
C.E.: $x > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \log^2 x = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\log x)(x \log x) = 0^+$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \log^2 x = +\infty$.

$f(x) \geq 0 \ \forall\, x > 0$; $f(x) = 0$ per $x = 1$.

$f'(x) = 2x \cdot \log^2 x + x^2 \cdot 2 \cdot \log x \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \cdot \log x\,(\log x + 1) \geq 0$

$\log x \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$\log x + 1 \geq 0 \Rightarrow \log x \geq -1 \Rightarrow x \geq e^{-1} = \dfrac{1}{e}$



$f(x)$ risulta crescente per $0 < x < e^{-1}$ e per $1 < x$, decrescente per $e^{-1} < x < 1$. Dato che la funzione è continua $\forall\, x > 0$ in $x = e^{-1}$ abbiamo un punto di massimo, in $x = 1$ invece un punto di minimo.

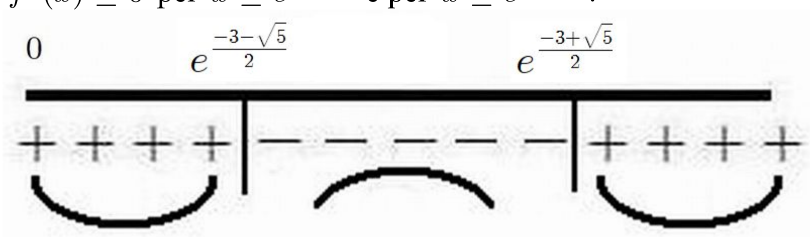
Da $f'(x) = 2x \cdot \log^2 x + 2x \cdot \log x$ avremo poi:

$f''(x) = 2\log^2 x + 4x \log x \cdot \dfrac{1}{x} + 2\log x + 2x \cdot \dfrac{1}{x} = 2\left(\log^2 x + 3\log x + 1\right) \geq 0$ per

$\log^2 x + 3\log x + 1 \geq 0 \Rightarrow \log x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ e quindi:

$f''(x) \geq 0$ per $\log x \leq \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$ e per $\log x \geq \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ovvero:

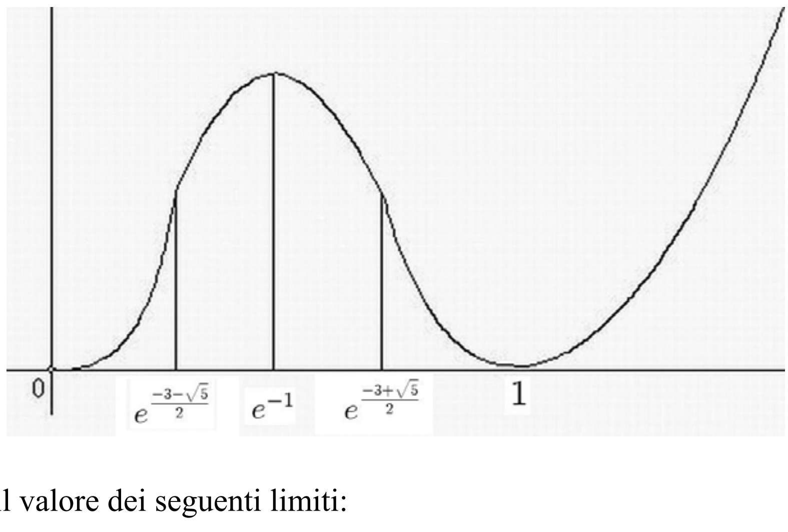
$f''(x) \geq 0$ per $x \leq e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$ e per $x \geq e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$.



Funzione convessa in $0 < x < e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$ e $e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} < x$, concava in $e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}} < x < e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$.

In $x = e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}}$ e in $x = e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}}$ ci sono due punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1}\ ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4+3x}{4+2x}\right)^{1-x} .$$

a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\sqrt{1+x^2}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1\,;$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{4+3x}{4+2x}\right)^{1-x} = \left(\to \frac{3}{2}\right)^{(\to -\infty)} = 0^+ .$

3) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x^2+kx-2}{x^2-3x+2}$, si determinino i valori del parametro k per i quali la funzione ha un punto di discontinuità di III specie, determinando anche i punti di tale discontinuità.

Essendo $f(x) = \dfrac{x^2+kx-2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x^2+kx-2}{(x-1)(x-2)}$ avremo un punto di discontinuità di III specie se il numeratore x^2+kx-2 si annulla per $x=1$ oppure per $x=2$.

Per $x=1$ avremo $1+k-2=0$ se $k=1$ da cui $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$ per cui:

$\displaystyle \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-2} = -3\,;$

per $x=2$ si ha $4+2k-2=0$ se $k=-1$ da cui $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ per cui:

$\displaystyle \lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3\,.$

4) Date le funzioni $f(x) = \log(x-1)$ e $g(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, determinare Campo d'esistenza ed espressione dell'inversa di $F(x) = f(g(x))$.

Avremo

$\displaystyle F(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right) = \log\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}-1\right) = \log\left(\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x-1}\right) \Rightarrow$

$\displaystyle F(x) = \log\left(\frac{2}{e^x-1}\right)$. Risulta $\dfrac{2}{e^x-1} > 0$ se $e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow x>0$, e quindi *C.E.*: $\mathbb{R}^*_+$.

Per avere l'espressione della funzione inversa di $F(x)$ poniamo:

$\displaystyle y = \log\left(\frac{2}{e^x-1}\right) \Rightarrow \frac{2}{e^x-1} = e^y \Rightarrow 2 = e^y e^x - e^y \Rightarrow e^y e^x = 2+e^y \Rightarrow$

$\displaystyle \Rightarrow e^x = \frac{2+e^y}{e^y} \Rightarrow x = \log\left(\frac{2+e^y}{e^y}\right)$ da cui $\displaystyle F^{-1}(x) = \log\left(\frac{2+e^x}{e^x}\right) = \log\left(\frac{2}{e^x}+1\right).$

5) Calcolare $\displaystyle \int \sqrt[4]{x^3} \cdot \log x \, \mathrm{d}x$ mediante integrazione per parti.

Cerchiamo le primitive mediante integrazione per parti:

$\displaystyle \int \sqrt[4]{x^3} \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \int x^{\frac{3}{4}} \cdot \log x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{3}{4}+1} x^{\frac{3}{4}+1} \cdot \log x - \frac{4}{7} \int x^{\frac{7}{4}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x =$

$\displaystyle = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \cdot \log x - \frac{4}{7} \int x^{\frac{7}{4}} \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} \cdot \log x - \frac{4}{7} \int x^{\frac{7}{4}-1} \, \mathrm{d}x =$

$$= \frac{4}{7}\, x^{\frac{7}{4}} \cdot \log x - \frac{4}{7} \int x^{\frac{3}{4}}\, \mathrm{d}x = \frac{4}{7}\, x^{\frac{7}{4}} \cdot \log x - \frac{4}{7}\, \frac{1}{\frac{3}{4}+1}\, x^{\frac{3}{4}+1} = \frac{4}{7}\, x^{\frac{7}{4}} \cdot \log x - \frac{16}{49}\, x^{\frac{7}{4}} + k\,.$$

6) Data la funzione $f(x) = x^2\, e^{1-2x}$, determinare gli intervalli dove la funzione risulta convessa e dove concava.

Da $f(x) = x^2\, e^{1-2x}$ segue $f'(x) = 2x\, e^{1-2x} - 2x^2\, e^{1-2x} = 2e^{1-2x}\left(x - x^2\right)$ e quindi:
$f''(x) = \,-4e^{1-2x}\left(x - x^2\right) + 2e^{1-2x}(1-2x) = 2e^{1-2x}\left(1 - 2x - 2x + 2x^2\right) =$
$f''(x) = 2e^{1-2x}\left(2x^2 - 4x + 1\right)$.
Quindi $f''(x) \geq 0$ per $2x^2 - 4x + 1 \geq 0 \Rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-2}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2} = 1 \pm \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Quindi $f''(x) \geq 0$ per $x < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ oppure per $x > 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. La funzione è convessa in $]-\infty; 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}[$ ed in $]1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}};\, +\infty[$, concava in $]1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}; 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}[$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 - 2x^2 y - y^3 + 3y$.

La funzione è differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 4xy = 2x(1-2y) = 0 \\ f'_y = 3 - 2x^2 - 3y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3(1-y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = \,-1 \end{cases}$$

$$\cup \begin{cases} 3 - 2x^2 - \frac{3}{4} = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{8} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{3}{\sqrt{8}} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \,-\frac{3}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi quattro punti stazionari:
$P_1 : (0,1)\,,\ P_2 : (0,\,-1)\,,\ P_3 : \left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right),\ P_4 : \left(-\dfrac{3}{2\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}\right).$

Da $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2-4y & -4x \\ -4x & -6y \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(0,1) = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = \,-2 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 12 > 0 \end{cases} \Rightarrow (0,1)$ punto di massimo;

$\mathbb{H}(0,\,-1) = \begin{Vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases} \Rightarrow (0,\,-1)$ punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \begin{Vmatrix} 0 & -3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -3 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = \,-18 < 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ punto di sella;

$\mathbb{H}\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = \begin{Vmatrix} 0 & 3\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & -3 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = \,-18 < 0 \Rightarrow \left(-\frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ punto di sella.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix}$, ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k \\ k \\ k \end{Vmatrix}$, si determini per quali valori di k il modulo del vettore $\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta uguale a 7.

$$\mathbb{Y} = \mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k \\ k \\ k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k+0+2k \\ -k+0+0 \\ 0+k-k \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3k \\ -k \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3k+0+0 \\ 0-k+0 \\ 3k-k+0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3k \\ -k \\ 2k \end{Vmatrix} = \mathbb{Y}$$. Quindi:

$\|\mathbb{Y}\| = \sqrt{(3k)^2 + (-k)^2 + (2k)^2} = \sqrt{9k^2 + k^2 + 4k^2} = \sqrt{14k^2} = 7$ dalla quale si ha:

$14k^2 = 49 \Rightarrow k^2 = \frac{49}{14} = \frac{7}{2} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$.

9) Determinare verità o falsità della proposizione $P : (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B})$ sapendo che la proposizione $P_1 : [(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}]$ risulta falsa mentre la proposizione $P_2 : [(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbb{B}]$ risulta vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})$	$(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C})$	$(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$non\, \mathbb{B}$	$\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	0	0	0	1	0	1	1	0

Solo in seconda riga la proposizione $P_1 : [(\mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}) \Rightarrow \mathbb{C}]$ risulta falsa mentre la proposizione $P_2 : [(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{C}) \Leftrightarrow \mathbb{B}]$ risulta vera, e sotto queste ipotesi la proposizione $P : (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B})$ risulta falsa.

10) Verificare che se $f(x)$ è una funzione derivabile due volte e convessa allora la funzione $F(x) = e^{1+f(x)}$ risulta una funzione convessa.

Da $F(x) = e^{1+f(x)}$ otteniamo $F'(x) = f'(x)\, e^{1+f(x)}$ e quindi poi:
$F''(x) = f''(x)\, e^{1+f(x)} + f'(x)(f'(x))\, e^{1+f(x)} = e^{1+f(x)}\left(f''(x) + (f'(x))^2\right)$.
Essendo $f(x)$ una funzione convessa risulta $f''(x) \geq 0$ e quindi $F''(x) \geq 0\ \forall x$ ovvero la funzione $F(x) = e^{1+f(x)}$ risulta una funzione convessa.