# COMPITO di ANALISI MATEMATICA 9/02/2023

I M 1) Dati i due numeri complessi $z_1 = e^{1-\pi i}$ e $z_2 = e^{1+3\pi i}$ calcolare $\sqrt[3]{z_1^2 z_2}$ .

Da $z_1 = e^{1-\pi i}$ segue $z_1 = e^1\,(\cos(-\pi) + i\,\mathrm{sen}(-\pi)) = -e$ ;
da $z_2 = e^{1+3\pi i}$ segue $z_2 = e^1\,(\cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi) = e\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -e$ .
Quindi $z_1^2 z_2 = -e^3$ ma anche : $z_1^2 = e^2\,(\cos(-2\pi) + i\,\mathrm{sen}(-2\pi))$ da cui:
$z_1^2 z_2 = e^2\,(\cos(-2\pi) + i\,\mathrm{sen}(-2\pi)) \cdot e\,(\cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi) =$
$z_1^2 z_2 = e^3\,(\cos(3\pi - 2\pi) + i\,\mathrm{sen}(3\pi - 2\pi)) = e^3\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi)$ . Per cui:
$\sqrt[3]{z_1^2 z_2} = \sqrt[3]{e^3}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ 0 \le k \le 2.$
Per $k = 0 : e\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{3}\right) = e\left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ;
Per $k = 1 : e\,(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi) = -e$ ;
Per $k = 2 : e\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{5\pi}{3}\right) = e\left(\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

I M 2) Verificare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho\,\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\varrho^{\frac{2}{5}}} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho^{\frac{3}{5}}\,\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta} = 0$ ; la convergenza è uniforme in quanto $\left|\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}\right| \le 1$ e quindi la funzione è continua in $(0,0)$. Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{h\cdot 0^2}}{\sqrt[5]{h^2+0^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{0\cdot h^2}}{\sqrt[5]{0^2+h^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$ .
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ . Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\,\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\varrho^{\frac{2}{5}}\cdot\varrho} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho\,\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\varrho^{\frac{7}{5}}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\varrho^{\frac{2}{5}}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta}}{\sqrt[5]{\varrho^2}}\,;$$

il limite non può certo essere uguale a zero e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^3 + x^2 - x\,y - e^y + 1 = 0$, soddisfatta nel punto $(0,0)$, si verifichi che risultano verificate le ipotesi del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y = y(x)$, analizzando poi la natura del punto stazionario che essa presenta in $x = 0$.

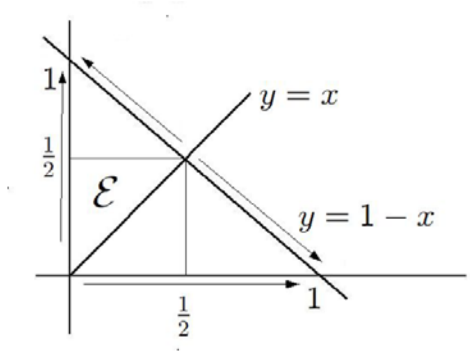
Dato il gradiente : $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 + 2x - y;\, -x - e^y\right)$ da cui $\nabla f(0,0) = (0;\,-1)$, essendo $f'_y = -1 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $x \to y(x)$ con derivata prima: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -\dfrac{0}{-1} = 0$ e quindi $x = 0$ risulta essere un punto stazionario per la funzione implicita. Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x+2 & -1 \\ -1 & -e^y \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{Vmatrix}$ per cui dalla $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) = -\dfrac{f''_{xx} + 2\,f''_{xy}\,(y') + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ avremo $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0) = -\dfrac{2 - 2\cdot 0 - 1\cdot 0}{-1} = 2 > 0$ e quindi il punto stazionario $x = 0$ risulta essere un punto di minimo.

I M 4) Data $f(x,y) = 2x\,e^y - y\,e^x$, si verifichi che le sue derivate direzionali $\mathcal{D}_v f(0,0)$ sono nulle in due sole direzioni $v$, determinando poi i versori corrispondenti a tali direzioni.

La funzione $f(x,y) = 2x\,e^y - y\,e^x$ è ovunque differenziabile, ed avremo quindi:
$\mathcal{D}_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = \nabla f(0,0) \cdot (\cos\alpha,\, \operatorname{sen}\alpha)$ ; essendo :
$\nabla f(x,y) = (2\,e^y - y\,e^x, 2x\,e^y - e^x)$ sarà allora $\nabla f(0,0) = (2,\,-1)$ e quindi :
$\mathcal{D}_v f(0,0) = (2,\,-1) \cdot (\cos\alpha,\, \operatorname{sen}\alpha) = 2\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha = 0$ se $\operatorname{sen}\alpha = 2\cos\alpha$.
Dalla $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ otteniamo $4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 5\cos^2\alpha = 1$ dalla quale si ha: $\cos\alpha = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ e quindi $\operatorname{sen}\alpha = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. I versori per i quali risulta $\mathcal{D}_v f(0,0) = 0$ sono quindi $v_1 = \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v_2 = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1 - x \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo. Possiamo anche non usare le condizioni di Kuhn-Tucker.
Infatti, essendo $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2$ avremo $f(x,y) \geq 0, \forall\,(x,y) \in \mathcal{E}$ con $f(x,y) = 0$ se $x = y$. I punti della retta $y = x, 0 \leq x \leq 1$ sono tutti punti di minimo.
Studiamo la funzione nei punti della frontiera di $\mathcal{E}$.
Se $x = 0$ avremo $f(0,y) = y^2$ che presenta un minimo in $(0,0)$ e un massimo in $(0,1)$.
Se $y = 0$ avremo $f(x,0) = x^2$ che presenta un minimo in $(0,0)$ e un massimo in $(1,0)$.
Se $y = 1 - x$ avremo $f(x, 1-x) = (2x-1)^2$ che presenta un minimo in $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e massimi in $(0,1)$ e $(1,0)$.
Quindi tutti i punti $x = y$ sono punti di minimo, con $f(x,x) = 0$ mentre i punti $(0,1)$ e $(1,0)$, con $f(0,1) = f(1,0) = 1$, saranno i punti di massimo.




II M 2) Scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(1,1)$ per la funzione $f(x,y) = x\log y - y\log x$.

La funzione data è sicuramente differenziabile due volte in $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ e quindi l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(1,1)$ sarà data da:

$P_2(x,y) = f(1,1) + \nabla f(1,1)\cdot(x-1, y-1) + \frac{1}{2}\left\| x-1 \quad y-1 \right\| \cdot \mathbb{H}(1,1) \cdot \left\| \begin{matrix} x-1 \\ y-1 \end{matrix} \right\|$.

Risulta $f(1,1) = 0$; $\nabla f(x,y) = \left(\log y - \frac{y}{x}; \frac{x}{y} - \log x\right)$ da cui $\nabla f(1,1) = (-1;1)$;

$\mathbb{H}(x,y) = \left\| \begin{matrix} \frac{y}{x^2} & \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} & -\frac{x}{y^2} \end{matrix} \right\|$ da cui $\mathbb{H}(1,1) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$. Quindi:

$P_2(x,y) = 0 + (-1;1)\cdot(x-1, y-1) + \frac{1}{2}\left\| x-1 \quad y-1 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x-1 \\ y-1 \end{matrix} \right\| =$

$P_2(x,y) = -x + 1 + y - 1 + \frac{1}{2}\left\| x-1 \quad y-1 \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x-1 \\ 1-y \end{matrix} \right\| =$

$P_2(x,y) = y - x + \frac{1}{2}\left((x-1)^2 - (y-1)^2\right) = y - x + \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2 - 2x + 2y\right) =$

$P_2(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x + 2y$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$.

Risolvendo anzitutto l'equazione lineare omogenea $y'' + y = 0$ otteniamo $\lambda^2 + 1 = 0$ e quindi le soluzioni $\lambda = \pm i$, da cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $y(x)$ che sarà $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x$.
Per trovare una soluzione particolare $y_0(x)$, visto il termine noto $\cos 2x$ che è annichilato dall'operatore $(D^2 + 4)$, ipotizziamo $y_0(x) = a \operatorname{sen} 2x + b\cos 2x$ da cui:
$y_0'(x) = 2a\cos 2x - 2b \operatorname{sen} 2x$ e quindi $y_0''(x) = -4a \operatorname{sen} 2x - 4b\cos 2x$.
Sostituendo nell'equazione: $-4a \operatorname{sen} 2x - 4b\cos 2x + a \operatorname{sen} 2x + b\cos 2x = \cos 2x$ ovvero:
$-3a \operatorname{sen} 2x - 3b\cos 2x = \cos 2x$ da cui $\begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$ per cui la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà: $y(x) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x$.
Per trovare la soluzione particolare, da $y'(x) = c_1\cos x - c_2 \operatorname{sen} x + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 2x$ segue:

$$\begin{cases} y(\pi)=0 \\ y'(\pi)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -c_2-\frac{1}{3}=0 \\ -c_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=-1 \\ c_2=-\frac{1}{3} \end{cases}$$ e quindi la soluzione particolare:

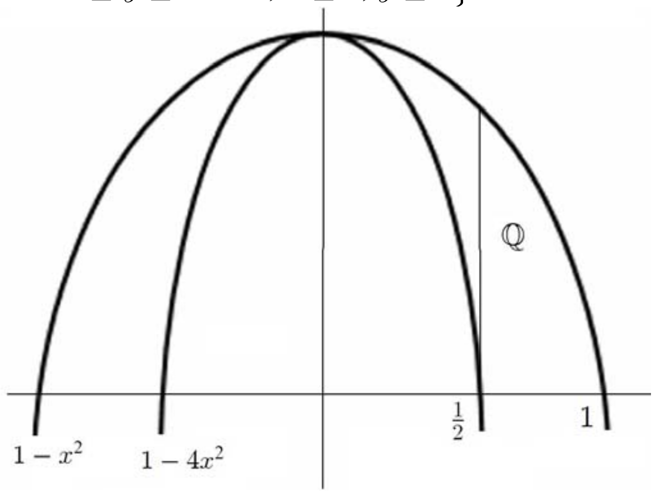
$\overline{y}(x) = -\operatorname{sen} x - \dfrac{1}{3}\cos x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$ .

II M 4) Data $\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 1-4x^2\le y\le 1-x^2,\, x\ge 0,\, y\ge 0\right\}$ calcolare :

$\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ .

Vista la regione di integrazione:

$\mathbb{Q}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \colon 1-4x^2\le y\le 1-x^2,\, x\ge 0,\, y\ge 0\right\}$




possiamo calcolare l'integrale in due modi: vedendo la regione come normale rispetto all'asse $x$ oppure vedendo la regione come normale rispetto all'asse $y$.
Usando il primo modo dovremo spezzare l'integrale in due parti:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{1-4x^2}^{1-x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,;$$

usando il secondo modo, da $y=1-4x^2$ si ha $x=\dfrac{\sqrt{1-y}}{2}$ e da $y=1-x^2$ avremo invece $x=\sqrt{1-y}$ e quindi calcoleremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{\frac{\sqrt{1-y}}{2}}^{\sqrt{1-y}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Nel primo modo avremo allora:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{1-4x^2}^{1-x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-x^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\frac{y^2}{2}\right|_{1-4x^2}^{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x\left(\left(1-x^2\right)^2-\left(1-4x^2\right)^2\right)\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\left(\left(1-x^2\right)^2-0\right)\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{\frac{1}{2}} 6x^3-15x^5\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x+x^5-2x^3\,\mathrm{d}x\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}\,x^4 \;-\frac{5}{2}\,x^6\right|_0^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^6-\;\frac{1}{2}x^4\right|_{\frac{1}{2}}^{1}\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{16}-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}-\;\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{16}-\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{16}\,.$$

Nel secondo modo avremo invece:

$$\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_{\frac{\sqrt{1-y}}{2}}^{\sqrt{1-y}} xy\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 y\left(\frac{x^2}{2}\right|_{\frac{\sqrt{1-y}}{2}}^{\sqrt{1-y}}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 y\left(1-y-\frac{1-y}{4}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{3}{4}\,y\,(1-y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\int_0^1 y-y^2\;\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right|_0^1 = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{16}\,.$$