COMPITO di MATEMATICA GENERALE 9/02/2023

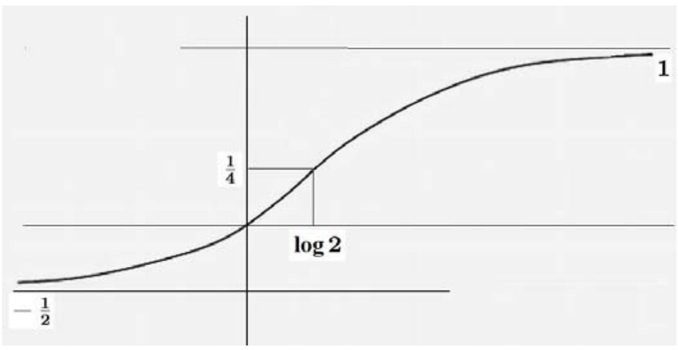
Compito $\mathbb{A}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+2}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+2}=\dfrac{0-1}{0+2}=-\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{e^x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1^-$.
$f(x)\geq 0$ per $e^x\geq 1\Rightarrow x\geq 0$; $f(x)=0$ per $x=0$.
$f'(x)=\dfrac{e^x\,(e^x+2)-e^x\,(e^x-1)}{(e^x+2)^2}=\dfrac{3e^x}{(e^x+2)^2}>0\ \forall x$.
La funzione è sempre strettamente crescente.
Da $f'(x)=\dfrac{3e^x}{(e^x+2)^2}$ avremo poi:

$$f''(x)=\frac{3e^x\,(e^x+2)^2-2\,(e^x+2)(e^x)(3e^x)}{(e^x+2)^4}=\frac{3e^x\,(e^x+2)(2-e^x)}{(e^x+2)^4}=$$

$f''(x)=\dfrac{3e^x\,(2-e^x)}{(e^x+2)^3}\geq 0$ per $2-e^x\geq 0\Rightarrow e^x\leq 2\Rightarrow x\leq\log 2$ e quindi:
$f(x)$ è funzione convessa per $x<\log 2$;
$f(x)$ è funzione concava per $x>\log 2$.
In $x=\log 2$ con $f(\log 2)=\dfrac{e^{\log 2}-1}{e^{\log 2}+2}=\dfrac{2-1}{2+2}=\dfrac{1}{4}$ c'è un punto di flesso.
Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{e^{\operatorname{tg}x}-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+3x-\operatorname{sen}^3x+5\log x}{5-3x+\cos^2x+\sqrt{2x}}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{e^{\operatorname{tg}x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}x}{e^{\operatorname{tg}x}-1}=1\cdot 1\cdot 1=1$;
b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+3x-\operatorname{sen}^3x+5\log x}{5-3x+\cos^2x+\sqrt{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+3x}{5-3x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{-3x}=-1$ dato che:
per $x\to+\infty$, risulta $\operatorname{sen}^3x=o(x)$, $\log x=o(x)$, $\cos^2x=o(x)$, $\sqrt{2x}=o(x)$.

3) Determinare in quale punto la tangente al grafico della funzione $f(x)=\log 2x$ risulta parallela alla retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,3)$.

La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log 2x$ e la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,3)$ per essere parallele dovranno avere lo stesso coefficiente angolare.
La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \log 2x$ ha per coefficiente angolare la derivata della funzione calcolata nel punto opportuno, mentre la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,3)$ ha coefficiente angolare $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-1}{2-1} = 2$.
Affinchè le due rette risultino parallele dovrà quindi risultare:
$f'(x) = \dfrac{1}{2x} \cdot 2 = \dfrac{1}{x} = m = 2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$. Il punto cercato è quindi $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

4) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ e che $f(g(x)) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Se $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$ e $f(g(x)) = \dfrac{e^x}{e^x+1}$ allora, posto $g(x) \neq -2$, avremo:
$f(g(x)) = \dfrac{g(x)+1}{g(x)+2} = \dfrac{e^x}{e^x+1} \Rightarrow (g(x)+1)(e^x+1) = e^x(g(x)+2)$ da cui:
$g(x)(e^x + 1 - e^x) = 2e^x - (e^x+1) \Rightarrow g(x) = e^x - 1$.
Da $g(x) = e^x - 1 = y \Rightarrow e^x = y+1 \Rightarrow x = \log(y+1)$ per cui $g^{-1}(x) = \log(x+1)$.

5) Determinare il valore del parametro k per cui $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{k}{x^2}\, \mathrm{d}x = 0$.

Cerchiamo anzitutto le primitive:
$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{k}{x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{3}+1} x^{-\frac{1}{3}+1} + k \cdot \frac{1}{x} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{k}{x} + c$ e quindi:
$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{k}{x^2}\, \mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{k}{x}\right|_1^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} + \frac{k}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + k\right) \Rightarrow \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right) = \frac{k}{2}$
e quindi $k = 3\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$.

6) Presa la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ si determini il valore del punto interno all'intervallo $[0,1]$ nel quale risulta soddisfatto il Teorema di Lagrange.

Dobbiamo risolvere l'equazione $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0}$.
Essendo $f(1) = 1 - 1 + 3 + 1 = 4$ e $f(0) = 1$, essendo poi $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3$, dovrà risultare $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 = \dfrac{4-1}{1-0} = 3 \Rightarrow 3x^2 - 2x = x(3x-2) = 0$ che ha per soluzioni $x = 0$ e $x = \dfrac{2}{3}$, e quest'ultima è la sola soluzione interna all'intervallo $[0,1]$.
Quindi $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 + 2x^2y + y^2$.

La funzione è differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:
$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x + 4xy = 2x(1+2y) = 0 \\ f'_y = 2x^2 + 2y = 2(x^2+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x=-\frac{1}{\sqrt{2}} \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari:

$P_1:(0,0)$, $P_2:\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$, $P_3:\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$.

Da $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} 2+4y & 4x \\ 4x & 2 \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(0,0)=\begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1|=2>0 \\ |\mathbb{H}_2|=4>0 \end{cases}$ segue $(0,0)$ punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)=\begin{Vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2|=-8<0 \Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ punto di sella;

$\mathbb{H}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)=\begin{Vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2|=-8<0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{2}\right)$ punto di sella.

8) Data la matrice $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X}=(1,2,1)$ determinare i valori del parametro k affinchè:

a) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ sia perpendicolare a $(1,1,1)$; oppure

b) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ sia parallelo a $(4,9,2)$; oppure

c) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ abbia modulo pari a $\sqrt{11}$.

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} k & 0 & 1 \\ 2 & k & 1 \\ 1 & -1 & k \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} k+0+1 \\ 2+2k+1 \\ 1-2+k \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} k+1 \\ 3+2k \\ k-1 \end{Vmatrix}$. Quindi:

a) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ perpendicolare a $(1,1,1)$ se $(k+1,3+2k,k-1)\cdot(1,1,1)=0$ da cui:
$k+1+3+2k+k-1=4k+3=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{4}$;

b) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ parallelo a $(4,9,2)$ se $\frac{k+1}{4}=\frac{3+2k}{9}=\frac{k-1}{2}$ vera se:
$9k+9=12+8k$ e se $6+4k=9k-9$ ambedue vere per $k=3$;

c) $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}$ ha modulo pari a $\sqrt{11}$ se $\sqrt{(k+1)^2+(3+2k)^2+(k-1)^2}=\sqrt{11}$ ovvero se:
$\sqrt{6k^2+12k+11}=\sqrt{11} \Rightarrow 6k^2+12k+11=11 \Rightarrow 6k(k+2)=0$ verificata per $k=0$ e per $k=-2$.

9) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare come risulta la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{B})$ quando la proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ è falsa.

A	B	C	$\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C}$	$(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})$	$non\, \mathbb{A}$	$non\, \mathbb{A}\, e\, \mathbb{B}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0

Solo in ottava riga la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})$, e sotto queste ipotesi la proposizione $(non\, \mathbb{A}\, e\, \mathbb{B})$ risulta falsa.

10) Calcolare un valore approssimato di $e^{2,1}$ con un opportuno polinomio di Taylor di II grado. Non occorre sviluppare tutti i calcoli, basta impostare la formula.

Visto il valore $x = 2,1$ per avere una sufficiente approssimazione impostiamo il Polinomio di Taylor con centro il punto $x = 2$. Sarà quindi:

$$f(2,1) = f(2) + f'(2)(2,1-2) + \frac{1}{2} f''(2)(2,1-2)^2 + o\big((2,1-2)^2\big)\,.$$

Da $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$ otterremo:

$$e^{2,1} = e^2 + e^2(2,1-2) + \frac{1}{2} e^2(2,1-2)^2 + o\big((2,1-2)^2\big)$$ e quindi:

$$e^{2,1} = e^2 + \frac{1}{10} e^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{100} e^2 + o\left(\frac{1}{100}\right) = e^2 \left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}\right) + o\left(\frac{1}{100}\right).$$