COMPITO di MATEMATICA GENERALE 9/02/2023

Compito $\mathbb{B}$

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x)=\dfrac{e^x-2}{e^x+1}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=\dfrac{0-2}{0+1}=-2$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-2}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1^-$.

$f(x)\geq 0$ per $e^x\geq 2\Rightarrow x\geq \log 2$; $f(x)=0$ per $x=\log 2$.

$$f'(x)=\frac{e^x\,(e^x+1)\,-e^x\,(e^x-2)}{(e^x+1)^2}=\frac{3e^x}{(e^x+1)^2}>0\ \forall x.$$

La funzione è sempre strettamente crescente.

Da $f'(x)=\dfrac{3e^x}{(e^x+1)^2}$ avremo poi:

$$f''(x)=\frac{3e^x\,(e^x+1)^2-2\,(e^x+1)(e^x)(3e^x)}{(e^x+1)^4}=\frac{3e^x\,(e^x+1)(1-e^x)}{(e^x+1)^4}=$$

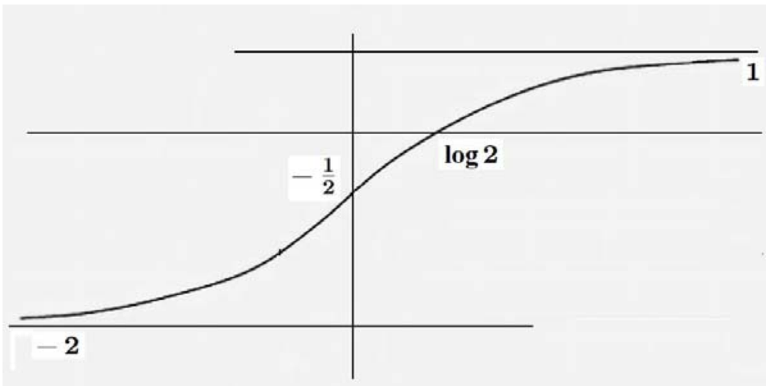
$f''(x)=\dfrac{3e^x\,(1-e^x)}{(e^x+1)^3}\geq 0$ per $1-e^x\geq 0\Rightarrow e^x\leq 1\Rightarrow x\leq 0$ e quindi:

$f(x)$ è funzione convessa per $x<0$;

$f(x)$ è funzione concava per $x>0$.

In $x=0$ con $f(0)=\dfrac{e^0-2}{e^0+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$ c'è un punto di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1-\operatorname{sen}x)}{1-e^{2x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-\cos^3 x-\sqrt[3]{x}}{2-x+\operatorname{sen}^2 x+2\log x}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1-\operatorname{sen}x)}{1-e^{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log(1-\operatorname{sen}x)}{-\operatorname{sen}x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{e^{2x}-1}=1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x-\cos^3 x-\sqrt[3]{x}}{2-x+\operatorname{sen}^2 x+2\log x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{-x}=-1$ dato che:

per $x\to+\infty$, risulta $\cos^3 x=o(x)$, $\sqrt[3]{x}=o(x)$, $\operatorname{sen}^2 x=o(x)$, $\log x=o(x)$.

3) Determinare in quale punto la tangente al grafico della funzione $f(x)=e^{2x}$ risulta parallela alla retta passante per i punti $(1,1)$ e $(3,5)$.

La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{2x}$ e la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(3,5)$ per essere parallele dovranno avere lo stesso coefficiente angolare.
La retta tangente al grafico della funzione $f(x) = e^{2x}$ ha per coefficiente angolare la derivata della funzione calcolata nel punto opportuno, mentre la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(3,5)$ ha coefficiente angolare $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{5-1}{3-1} = 2$.
Affinchè le due rette risultino parallele dovrà quindi risultare:
$f'(x) = 2\,e^{2x} = m = 2 \Rightarrow e^{2x} = 1 \Rightarrow x = 0$. Il punto cercato è quindi $x_0 = 0$.

4) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ e che $f(g(x)) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Se $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$ e $f(g(x)) = \dfrac{e^x}{e^x-1}$ allora, posto $g(x) \neq -1$ e $x \neq 0$, avremo:
$f(g(x)) = \dfrac{g(x)+2}{g(x)+1} = \dfrac{e^x}{e^x-1} \Rightarrow (g(x)+2)(e^x-1) = e^x(g(x)+1)$ da cui:
$g(x)(e^x - 1 - e^x) = e^x - 2(e^x - 1) \Rightarrow -g(x) = 2 - e^x \Rightarrow g(x) = e^x - 2$.
Da $g(x) = e^x - 2 = y \Rightarrow e^x = y + 2 \Rightarrow x = \log(y+2)$ per cui $g^{-1}(x) = \log(x+2)$.

5) Determinare il valore del parametro k per cui $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{k}{x^3}\,\mathrm{d}x = 0$.

Cerchiamo anzitutto le primitive:
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{k}{x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,x^{-\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{-3+1}k\cdot x^{-3+1} = 2\sqrt{x} + \frac{k}{2x^2} + c$$ e quindi:
$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{k}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left(2\sqrt{x} + \frac{k}{2x^2}\right|_1^2 = \left(2\sqrt{2} + \frac{k}{8}\right) - \left(2 + \frac{k}{2}\right) \Rightarrow 2\left(\sqrt{2} - 1\right) = \frac{3k}{8}$$
e quindi $k = \frac{16}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

6) Presa la funzione $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 2$ si determini il valore del punto interno all'intervallo $[0,1]$ nel quale risulta soddisfatto il Teorema di Lagrange.

Dobbiamo risolvere l'equazione $f'(x_0) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0}$.
Essendo $f(1) = 1 - 1 + 2 + 2 = 4$ e $f(0) = 2$, essendo poi $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$, dovrà risultare $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2 = \dfrac{4-2}{1-0} = 2 \Rightarrow 3x^2 - 2x = x\,(3x-2) = 0$ che ha per soluzioni $x = 0$ e $x = \dfrac{2}{3}$, e quest'ultima è la sola soluzione interna all'intervallo $[0,1]$.
Quindi $x_0 = \dfrac{2}{3}$.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^2$.

La funzione è differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:
$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 2y^2 = 2\,(x - y^2) = 0 \\ f'_y = 2y - 4xy = 2y\,(1 - 2x) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \cup \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi tre punti stazionari:

$P_1 : (0,0)$, $P_2 : \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $P_3 : \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Da $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2 & -4y \\ -4y & 2-4x \end{Vmatrix}$ otteniamo:

$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 4 > 0 \end{cases}$ segue $(0,0)$ punto di minimo;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = -8 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ punto di sella;

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{Vmatrix}$ da $|\mathbb{H}_2| = -8 < 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ punto di sella.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = (1, 2, -1)$ determinare i valori del parametro k affinchè:

a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ sia perpendicolare a $(1,1,1)$; oppure
b) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ sia parallelo a $(5,5,1)$; oppure
c) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ abbia modulo pari a $\sqrt{19}$.

$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k & 2 & 1 \\ 0 & k & -1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k+4-1 \\ 0+2k+1 \\ 1+2-k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k+3 \\ 2k+1 \\ 3-k \end{Vmatrix}$. Quindi:

a) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ perpendicolare a $(1,1,1)$ se $(k+3, 2k+1, 3-k) \cdot (1,1,1) = 0$ da cui:
$k+3+2k+1+3-k = 2k+7 = 0 \Rightarrow k = -\frac{7}{2}$;

b) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ parallelo a $(5,5,1)$ se $\frac{k+3}{5} = \frac{2k+1}{5} = \frac{3-k}{1}$ vera se:
$5k+15 = 10k+5$ e se $2k+1 = 15-5k$ ambedue vere per $k = 2$;

c) $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ ha modulo pari a $\sqrt{19}$ se $\sqrt{(k+3)^2 + (2k+1)^2 + (3-k)^2} = \sqrt{19}$ ovvero se:
$\sqrt{6k^2+4k+19} = \sqrt{19} \Rightarrow 6k^2+4k+19 = 19 \Rightarrow 2k(3k+2) = 0$ verificata per $k = 0$ e per $k = -\frac{2}{3}$.

9) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare come risulta la proposizione $(non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C})$ quando la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ è falsa.

A	B	C	$\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}$	$\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C}$	$(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$	$non\,\mathbb{A}$	$non\,\mathbb{A}\,e\,\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0

Solo in ottava riga la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C}) \Rightarrow (\mathbb{B}\, o\, \mathbb{C})$, e sotto queste ipotesi la proposizione $(non\, \mathbb{A}\, e\, \mathbb{C})$ risulta falsa.

10) Calcolare un valore approssimato di $e^{1,2}$ con un opportuno polinomio di Taylor di II grado. Non occorre sviluppare tutti i calcoli, basta impostare la formula.

Visto il valore $x = 1,2$ per avere una sufficiente approssimazione impostiamo il Polinomio di Taylor con centro il punto $x = 1$. Sarà quindi:
$f(1,2) = f(1) + f'(1)(1,2-1) + \frac{1}{2} f''(1)(1,2-1)^2 + o\big((1,2-1)^2\big)$.
Da $f(x) = f'(x) = f''(x) = e^x$ otterremo:
$e^{1,2} = e^1 + e^1(1,2-1) + \frac{1}{2} e^1 (1,2-1)^2 + o\big((1,2-1)^2\big)$ e quindi:
$e^{1,2} = e + \frac{2}{10} e + \frac{1}{2} \frac{4}{100} e + o\left(\frac{4}{100}\right) = e\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{50}\right) + o\left(\frac{1}{25}\right)$.