COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2022/23

Prova Intermedia 2022

I M 1) Sapendo che $e^z = e\,(\cos 1 - i \operatorname{sen} 1)$, limitandosi al valore principale, calcolare $\sqrt[3]{z}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & : (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & : (x,y) = (0,0) \end{cases}$, determinare se la funzione, nel punto $(0,0)$, risulta continua e poi se risulta differenziabile.

I M 3) Data la funzione $f(x,y) = x - e^{y-x}$, determinare i versori $v = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ per i quali risulta nulla $\mathcal{D}_v f(1,1)$.

I M 4) Verificare che con l'equazione $f(x,y,z) = xe^z - 2ye^x + ze^y = 0$, soddisfatta nel punto $P = (1,1,1)$, si può definire implicitamente una funzione $z = z(x,y)$. Determinare dz e calcolare poi d$^2 z$.

I M 5) Sapendo che la funzione $f(x.y) = e^{y^2-x}$ é differenziabile nel punto $(1,1)$, calcolare un valore approssimato di $f(1,1;0,9)$ mediante l'opportuno polinomio di II grado.

I Appello Sessione Invernale 2023

I M 1) Dopo aver trovato le otto radici dell'equazione $\left(x^4-1\right)\left(x^4+1\right) = 0$, detta z la loro somma, calcolare e^z.

I M 2) Verificare se la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^6-y^6}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = xz - yz + x^2 - y^2 = 0 \\ g(x,y,z) = x^2yz^2 - xy^2z^3 = 0 \end{cases}$, ed il punto $\mathrm{P} = (1,1,1)$, determinare quale tipo di funzione implicita $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sia possibile definire con tale sistema, e di questa calcolare le derivate prime nel punto opportuno.

I M 4) Data $f(x,y,z) = x\,e^{y-z} - y\,e^{x-z}$, calcolare $\mathcal{D}_v f(0,0,0)$, dove v è il versore del vettore $(1,-1,1)$. Determinare poi l'espressione del Polinomio di Mac Laurin di secondo grado di tale funzione.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x\,y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - 2x - y \leq 0 \\ y - 2x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema: $\begin{cases} y' = 1 + x + y + xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali $\begin{cases} x' = 3x + y + e^t \\ y' = -x + y - e^t \end{cases}$ sotto le condizioni $\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, con $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x; \sqrt{3} \leq y; x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

II Appello Sessione Invernale 2023

I M 1) Dati i due numeri complessi $z_1 = e^{1-\pi i}$ e $z_2 = e^{1+3\pi i}$ calcolare $\sqrt[3]{z_1^2 z_2}$.

I M 2) Verificare che la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{xy^2}}{\sqrt[5]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ risulta continua nel punto $(0,0)$, determinando poi se essa risulti anche differenziabile nel punto $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^3 + x^2 - x\,y - e^y + 1 = 0$, soddisfatta nel punto $(0,0)$, si verifichi che risultano verificate le ipotesi del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y = y(x)$, analizzando poi la natura del punto stazionario che essa presenta in $x = 0$.

I M 4) Data $f(x,y) = 2x\,e^y - y\,e^x$, si verifichi che le sue derivate direzionali $\mathcal{D}_v f(0,0)$ sono nulle in due sole direzioni v, determinando poi i versori corrispondenti a tali direzioni.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ y \leq 1 - x \end{cases} \end{cases}$.

II M 2) Scrivere l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $(1,1)$ per la funzione $f(x,y) = x \log y - y \log x$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 1 \end{cases}$:

II M 4) Data $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 - 4x^2 \leq y \leq 1 - x^2,\, x \geq 0,\, y \geq 0\right\}$ calcolare : $\displaystyle\iint\limits_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Appello Sessione Straordinaria I 2023

I M 1) Data l'equazione $x^2 - 2x + k = 0$, sapendo che essa ammette la soluzione $x = 1 + i$, determinare il valore del parametro k e calcolare poi le radici cubiche dell'altra soluzione di tale equazione.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, trovare il valore del parametro k per il quale la funzione risulta continua in $(0,0)$, determinando poi, mediante la definizione, se in tale punto essa risulta anche differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x \operatorname{sen} y - y \cos x + x - y = 0$, che risulta soddisfatta nel punto $(0,0)$, si verifichi che sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y = y(x)$, determinando poi di questa derivata prima e seconda in $x = 0$.

I M 4) Data $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$, determinare le direzioni v per le quali $\mathcal{D}^2_{v,v} f(0,0) = 2$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v. : } 2x^2 - 1 \leq y \leq x \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

I M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x\,y' = (y-1) \log x \\ y(1) = 3 \end{cases}$.

II M 4) Data $f(x,y) = 2x - 2y$, si determini, per $x > 0, y > 0$, un punto (a,b), appartenente alla retta di equazione $y = 2 - x$, tale che, detto $\mathbb{Q}$ il rettangolo avente due lati sugli assi e per vertici opposti $(0,0)$ e (a,b), risulti $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0$.