COMPITO di ANALISI MATEMATICA 22/03/2023

I M 1) Data l'equazione $x^2 - 2x + k = 0$, sapendo che essa ammette la soluzione $x = 1 + i$, determinare il valore del parametro k e calcolare poi le radici cubiche dell'altra soluzione di tale equazione.

Sappiamo che, in una equazione polinomiale a coefficienti reali, se ci sono soluzioni complesse, queste sono sempre in numero pari, dato che per ogni soluzione complessa è presente anche la sua coniugata, che in questo caso sarà $x = 1 - i$, e di questa andranno trovate le radici cubiche. Prima, ricordando che il termine noto dell'equazione coincide con il prodotto delle soluzioni, troviamo il valore del parametro k, ed avremo $k = (1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$.
Infatti da $x^2 - 2x + 2 = 0$ otteniamo $x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1}$ per cui $x = 1 \pm i$.
Da $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}\right)$ risulta:
$\sqrt[3]{1 - i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{7\pi}{12} + k\,\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $0 \le k \le 2$. Per cui:
Se $k = 0$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12}\right)$;
Se $k = 1$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{15\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;
Per $k = 2$: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{23\pi}{12}\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ k & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, trovare il valore del parametro k per il quale la funzione risulta continua in $(0,0)$, determinando poi, mediante la definizione, se in tale punto essa risulta anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ passando a coordinate polari:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right) = 0;$$
la convergenza è uniforme in quanto $\left|\varrho\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)\right| \le |\varrho\,(1 + \varrho)| < \varepsilon$ che risulta soddisfatta per $0 < \varrho < \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon} - 1}{2}$. La funzione è continua in $(0,0)$ se $k = f(0,0) = 0$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3 + 0}{h^2 + 0} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^3} = 1;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0 + h^4}{0 + h^2} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^3} = 0.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (1,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 - (1,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4-x\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4-x^3-x\,y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ e quindi se
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4-x\,y^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:
$$\lim_{\varrho\to0} \frac{\varrho^3\,(\varrho\,\mathrm{sen}^4\vartheta-\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta\,)}{\varrho^3} = \lim_{\varrho\to0}\left(\varrho\,\mathrm{sen}^4\vartheta-\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right) = \left(-\cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\vartheta\right);$$
il limite risulta uguale a zero solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=x\,\mathrm{sen}\,y-y\cos x+x-y=0$, che risulta soddisfatta nel punto $(0,0)$, si verifichi che sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y=y(x)$, determinando poi di questa derivata prima e seconda in $x=0$.

Dato il gradiente : $\nabla f(x,y)=(\mathrm{sen}\,y+y\,\mathrm{sen}\,x+1;x\cos y-\cos x-1)$ da cui :
$\nabla f(0,0)=(1;-2)$, essendo $f'_y=-2\neq0$ si può definire una funzione implicita $x\to y(x)$ con derivata prima: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0)=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$.
Sarà poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} y\cos x & \cos y+\mathrm{sen}\,x\\ \cos y+\mathrm{sen}\,x & -x\,\mathrm{sen}\,y\end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0,0)=\begin{Vmatrix}0&1\\1&0\end{Vmatrix}$ per cui, dalla $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0)=-\dfrac{f''_{xx}+2\,f''_{xy}\,(y')+f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ avremo :
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(0)=-\frac{0+2\cdot\frac12-0\cdot\left(\frac12\right)^2}{-2}=\frac12\,.$$

I M 4) Data $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$, determinare le direzioni v per le quali $\mathcal{D}^2_{v,v}f(0,0)=2$.

La funzione $f(x,y)=e^{x^2-y^2}$ è ovunque differenziabile due volte, ed avremo quindi:
$\mathcal{D}_vf(0,0)=\nabla f(0,0)\cdot v=\nabla f(0,0)\cdot(\cos\alpha,\ \mathrm{sen}\,\alpha)$ e pure
$\mathcal{D}^2_{v,v}f(0,0)=v\cdot\mathbb{H}(0,0)\cdot v^T$.
Essendo :
$\nabla f(x,y)=\left(2x\,e^{x^2-y^2},\,-2y\,e^{x^2-y^2}\right)$ sarà allora $\nabla f(0,0)=(0,0)$.
Avremo poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix}(2+4x^2)\,e^{x^2-y^2} & -4xy\,e^{x^2-y^2}\\ -4xy\,e^{x^2-y^2} & (-2+4y^2)\,e^{x^2-y^2}\end{Vmatrix}$ e quindi:
$\mathbb{H}(0,0)=\begin{Vmatrix}2&0\\0&-2\end{Vmatrix}$ per cui:
$\mathcal{D}^2_{v,v}f(0,0)=\|\cos\alpha\quad\mathrm{sen}\,\alpha\,\|\cdot\begin{Vmatrix}2&0\\0&-2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\cos\alpha\\ \mathrm{sen}\,\alpha\end{Vmatrix}=\|\cos\alpha\quad\mathrm{sen}\,\alpha\,\|\cdot\begin{Vmatrix}2\cos\alpha\\ -2\,\mathrm{sen}\,\alpha\end{Vmatrix}=$
$\mathcal{D}^2_{v,v}f(0,0)=2\cos^2\alpha-2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha=2\left(\cos^2\alpha-\mathrm{sen}^2\,\alpha\right)=2\cos2\alpha=2\Rightarrow\cos2\alpha=1$:
vera per $2\alpha=0\Rightarrow\alpha=0$ oppure per $2\alpha=2\pi\Rightarrow\alpha=\pi$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x^2+y^2\\ \text{s.v.}: 2x^2-1\le y\le x\end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} 2x^2 - y - 1 \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases} \end{cases}$.

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_1 \big(2x^2 - y - 1\big) - \lambda_2 (y - x)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 2y = 0 \\ 2x^2 - 1 \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 \leq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}(0,0) = \left\| \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{matrix} \right\|$, da $\begin{cases} |\mathbb{H}_1| > 0 \\ |\mathbb{H}_2| > 0 \end{cases}$ segue che $(0,0)$ risulta un punto di minimo, ma nel problema è un punto di frontiera e verrà riesaminato nel seguito.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 4\lambda_1 x = 2x\,(1 - 2\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 = 0 \\ y = 2x^2 - 1 \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda_1 = 2 \\ -1 \leq 0 : \text{ vera} \end{cases} \quad \text{oppure}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ 2x^2 = \frac{3}{4} \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : \text{falsa} \end{cases}.$$

Il punto $P_1 : (0, -1)$, con $\lambda_1 = 2$ ed il punto $P_2 : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ con $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$ potrebbero essere punti di massimo, il punto $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ non appartiene alla regione ammissibile.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ x^2 - 1 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda_2}{2} \\ y = \frac{\lambda_2}{2} \\ y = x \\ x^2 - 1 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 0 \leq 0 : \text{vera} \end{cases}.$$

Il punto $(0,0)$ rimane un punto da controllare.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 4\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \quad \text{dato che} \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} :$$

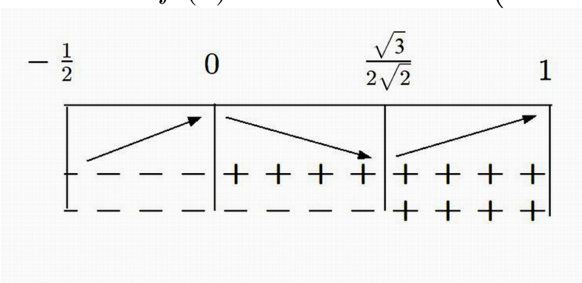
$$\begin{cases} -1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} < 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$. Il punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ non è nulla.

$$\begin{cases} 2 - 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{10}{3} > 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .$$

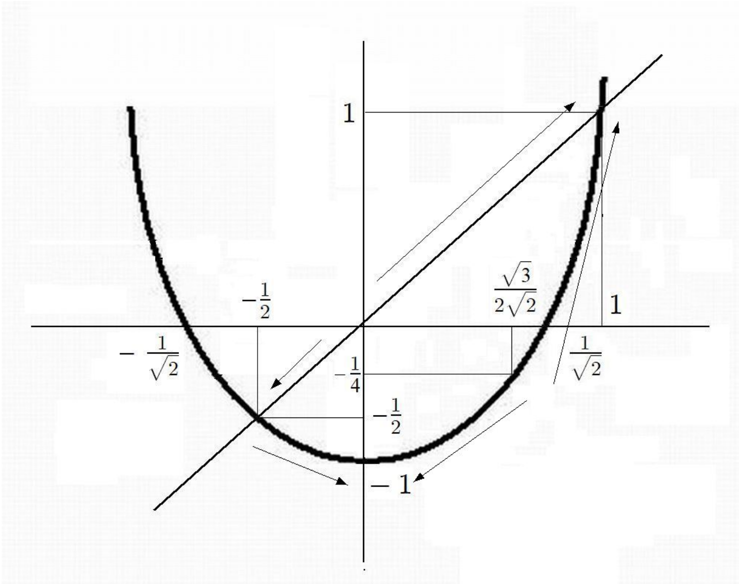
Il punto $P_3 : (1,1)$ con $\lambda_1 = \dfrac{4}{3} > 0$ e $\lambda_2 = \dfrac{10}{3} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

Essendo emerso un solo candidato, il punto $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$ sarà il punto di minimo.

Per concludere, studiamo il comportamento sui punti della frontiera di $\mathcal{E}$.
Se $y = x$ risulta $f(x,x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Quindi $f'(x) = 2x \geq 0$ per $x \geq 0$ per cui il punto $(0,0)$, con $f(0,0) = 0$, risulta un punto di minimo relativamente ai soli punti della retta $y = x$ ma lo risultava anche per l'analisi globale precedente e quindi è il punto di minimo, oltretutto assoluto in quanto $f(x,y) > 0 \ \forall \ (x,y) \neq (0,0)$.
Se $y = 2x^2 - 1$, avremo:
$f\left(x, 2x^2 - 1\right) = 4x^4 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 6x = 2x\left(8x^2 - 3\right) > 0$.



Il punto $P_1 : (0, -1)$ con $f(0, -1) = 1$ risulta punto di massimo, mentre invece il punto $P_2 : \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{2}}, -\dfrac{1}{4}\right)$ sulla frontiera risulta punto di minimo, contrariamente a quanto visto nell'indagine globale e quindi non è nulla. Il punto $P_3 : (1,1)$ con $f(1,1) = 2$ risulta punto di massimo oltretutto assoluto.



II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ x + y' - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{Vmatrix} D-1 & -2 \\ 1 & D-3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} D-1 & -2 \\ 1 & D-3 \end{vmatrix}(x) = 0 \Rightarrow \left(D^2 - 4D + 5\right)(x) = 0 \Rightarrow x'' - 4x' + 5x = 0\,.$$

Da $x'' - 4x' + 5x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà:

$x(t) = c_1 e^{2t} \operatorname{sen} t + c_2\, e^{2t} \cos t\,.$

Dalla $x' = x + 2y$ otteniamo $y(t) = \frac{1}{2}\,(x' - x)$ e quindi:

da $x'(t) = 2c_1 e^{2t} \operatorname{sen} t + c_1 e^{2t} \cos t + 2c_2\, e^{2t} \cos t - c_2\, e^{2t} \operatorname{sen} t$ e

$x(t) = c_1 e^{2t} \operatorname{sen} t + c_2\, e^{2t} \cos t$ avremo:

$y(t) = \frac{1}{2}\,(x' - x) = \frac{1}{2} e^{2t}\,(c_1(\operatorname{sen} t + \cos t) + c_2(\cos t - \operatorname{sen} t))$

e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t}\,(c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t) \\ y(t) = \frac{1}{2}\, e^{2t}\,(c_1(\operatorname{sen} t + \cos t) + c_2(\cos t - \operatorname{sen} t)) \end{cases}.$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x\, y' = (y-1) \log x \\ y(1) = 3 \end{cases}$.

L'equazione data è una equazione a variabili separabili che portiamo nella forma:

$\frac{1}{y-1}\, y' = \frac{\log x}{x}$ avendo posto $y \neq 1$ e $x > 0$. Osserviamo che la $y = 1$ è soluzione dell'equazione differenziale. Passando ad integrare avremo:

$$\int \frac{1}{y-1}\, y'\, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{y-1}\, \mathrm{d}y = \int \frac{\log x}{x}\, \mathrm{d}x + k \text{ da cui:}$$

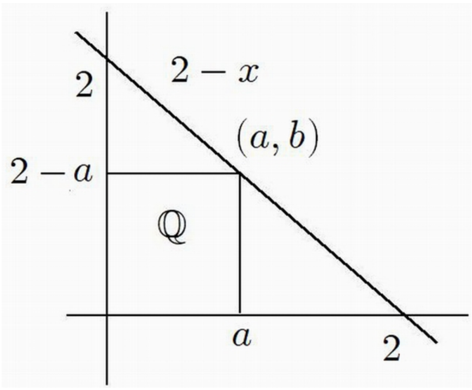
$$\log(y-1) = \frac{1}{2} \log^2 x + k \Rightarrow y - 1 = e^{\frac{1}{2}\log^2 x + k} = m\, e^{\frac{1}{2}\log^2 x} = m\left(\left(e^{\log x}\right)^{\log x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

avendo posto $e^k = m$ e quindi $y = m\sqrt{x^{\log x}} + 1\,.$

Dalla $y(1) = 3$ otteniamo $3 = m\sqrt{1^{\log 1}} + 1 = m + 1 \Rightarrow m = 2$.
Quindi la soluzione particolare del problema: $y = 2\sqrt{x^{\log x}} + 1$.
La soluzione $y = 1$ si ottiene per $m = 0$ ma $e^k = m$ e quindi per $k \to -\infty$.

II M 4) Data $f(x, y) = 2x - 2y$, si determini, per $x > 0, y > 0$, un punto (a, b), appartenente alla retta di equazione $y = 2 - x$, tale che, detto $\mathbb{Q}$ il rettangolo avente due lati sugli assi e per vertici opposti $(0,0)$ e (a, b), risulti $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$.

Per il punto (a, b), dato che appartiene alla retta di equazione $y = 2 - x$, sarà $b = 2 - a$.
Vista la regione di integrazione:



$\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le x \le a, 0 \le y \le 2 - a\right\}$ avremo:

$$\iint_{\mathbb{Q}} 2x - 2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^a \int_0^{2-a} 2x - 2y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^a \left(2xy - y^2\right|_0^{2-a}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^a 2x(2-a) - (2-a)^2\,\mathrm{d}x = \left((2-a)\,x^2 - (2-a)^2\,x\right|_0^a =$$

$$= (2-a)\,a^2 - (2-a)^2\,a = a\,(2-a)(a - (2-a)) = a\,(2-a)(2a-2) = 0\,.$$

Viste le limitazioni imposte $x > 0, y > 0$, le soluzioni $a = 0$ e $a = 2$ non sono accettabili e quindi rimane solo la soluzione $a = 1$, ovvero $\mathbb{Q}$ è un quadrato.