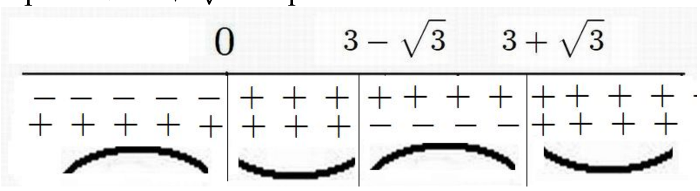
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 29/05/2023

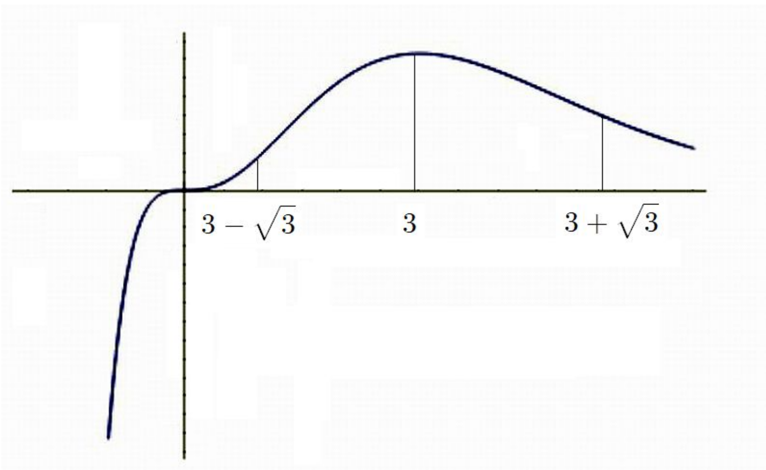
1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x^3 e^{1-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 e^{1-x} = (\to -\infty)(\to +\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{e^{x-1}} = 0^+$.
$f(x) \geq 0$ per $x^3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$; $f(x) = 0$ per $x = 0$.
$f'(x) = 3x^2 e^{1-x} - x^3 e^{1-x} = x^2 e^{1-x}(3-x) > 0$ per $x < 3$.
La funzione è crescente per $x < 3$ e decrescente per $x > 3$. In $x = 3$ avremo quindi un punto di massimo.
In $x = 0$ risulta $f'(0) = 0$ ma la derivata non cambia di segno attraversando il punto che quindi sarà certamente un punto di flesso a tangente orizzontale.
Da $f'(x) = x^2 e^{1-x}(3-x)$ avremo poi:
$f''(x) = 2x\,e^{1-x}(3-x) - x^2 e^{1-x}(3-x) - x^2 e^{1-x} = x\,e^{1-x}\left(6 - 2x - 3x + x^2 - x\right) \Rightarrow$
$f''(x) = x\,e^{1-x}\left(x^2 - 6x + 6\right) \geq 0$. Combinando $x \geq 0$ con $x^2 - 6x + 6 \geq 0$,
da $x^2 - 6x + 6 = 0$ abbiamo $x = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$ e quindi $x^2 - 6x + 6 > 0$ per $x < 3 - \sqrt{3}$ oppure per $x > 3 + \sqrt{3}$ e quindi avremo:



$f''(x) < 0$ per $x < 0$ e per $3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$;
$f''(x) > 0$ per $0 < x < 3 - \sqrt{3}$ e per $3 + \sqrt{3} < x$.
$f(x)$ è funzione concava per $x < 0$ e per $3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3}$;
$f(x)$ è funzione convessa per $0 < x < 3 - \sqrt{3}$ e per $3 + \sqrt{3} < x$.
In $x = 0$ con $f(0) = 0$ c'è un punto di flesso, così come ci sono altri due punti di flesso in $x = 3 - \sqrt{3}$ e in $x = 3 + \sqrt{3}$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\log(1+3x^2)}{\log(1+2x^2)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x + 3x^2 - \log x}{6x - x^2 + 2\log x}$.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{\log(1+2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+3x^2)}{3x^2}\cdot\frac{3x^2}{2x^2}\cdot\frac{1}{\frac{\log(1+2x^2)}{2x^2}}=1\cdot\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$;

b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+3x^2-\log x}{6x-x^2+2\log x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{-x^2}=-3$ in quanto risultano, per $x\to+\infty$, sia $x=o(x^2)$ che $\log x=o(x^2)$.

3) Determinare in quale punto la tangente al grafico della funzione $f(x)=\log 2x$ risulta perpendicolare alla retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,-3)$.

La retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\log 2x$ e la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,-3)$ per essere perpendicolari dovranno avere coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro.
La retta tangente al grafico della funzione $f(x)=\log 2x$ ha per coefficiente angolare la derivata della funzione calcolata nel punto opportuno, mentre la retta passante per i punti $(1,1)$ e $(2,-3)$ ha coefficiente angolare $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-3-1}{2-1}=-4$.
Affinchè le due rette risultino perpendicolari dovrà quindi risultare:
$f'(x)=\frac{1}{2x}\cdot 2=\frac{1}{x}=-\frac{1}{m}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=4$. Il punto cercato è quindi $x_0=4$.

4) Data $f(x)=\frac{e^{2x}}{e^x+1}$, se ne determini campo d'esistenza, codominio, dove risulta invertibile ed espressione della sua funzione inversa.

Risulta *C.E.*: $\mathbb{R}$, con $f(x)>0\ \forall x$. Inoltre: $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}}{e^x+1}=\frac{(\to 0)}{(\to 0+1)}=0^+$ mentre $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}e^x\frac{e^x}{e^x+1}=(\to+\infty)(\to 1)=+\infty$.
Quindi $f:\mathbb{R}\to\,]0;+\infty[$. Risulta poi:
$f'(x)=\frac{2e^{2x}(e^x+1)-e^{2x}e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^{3x}+2e^{2x}-e^{3x}}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{3x}+2e^{2x}}{(e^x+1)^2}$ e quindi $f'(x)>0\,\forall x$.
La funzione è strettamente crescente in tutto il suo Campo di esistenza e quindi invertibile su tutto $\mathbb{R}$ con $f^{-1}:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$. Per avere l'espressione dell'inversa, da $\frac{e^{2x}}{e^x+1}=y$ otteniamo $e^{2x}=e^x y+y$ ovvero $e^{2x}-e^x y-y=0$ e quindi $e^x=\frac{y\pm\sqrt{y^2+4y}}{2}$.
Essendo $y>0$, la soluzone $e^x=\frac{y-\sqrt{y^2+4y}}{2}$ non è accettabile in quanto sempre negativa, quindi prendiamo la sola soluzione $e^x=\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}$ da cui otteniamo:
$x=\log\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4y}}{2}\right)$ e quindi l'inversa sarà $y=\log\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4x}}{2}\right)$.

5) Determinare il valore del parametro k per cui $\int_0^k 2-2x\,\mathrm{d}x=1$.

Cerchiamo anzitutto le primitive:

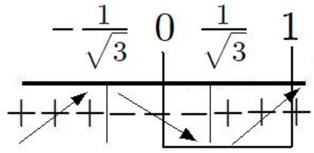
$$\int 2-2x\,\mathrm{d}x = 2x - x^2 + c \text{ e quindi:}$$
$$\int_0^k 2-2x\,\mathrm{d}x = \left(2x - x^2\right|_0^k = 2k - k^2 = 1 \Rightarrow k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 = 0 \Rightarrow k = 1\,.$$

6) Data la funzione $f(x) = x^3 - kx + 2$, determinare il valore del parametro k per il quale a tale funzione risulta applicabile il Teorema di Rolle nell'intervallo $[0;1]$ e determinare poi il conseguente punto stazionario nonchè la sua natura.

La funzione è un polinomio e quindi continua e derivabile in ogni intervallo reale. Per poter applicare il Teorema di Rolle deve anche risultare $f(0) = f(1)$ ovvero $2 = 1 - k + 2$ ovvero $k = 1$. Quindi in almeno un punto è nulla la derivata della funzione $f(x) = x^3 - x + 2$. Ma $f'(x) = 3x^2 - 1 = 0$ per $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e dato che il punto deve essere interno all'intervallo $[0;1]$ la soluzione sarà quella positiva, ovvero $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quindi $f'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$.

Per determinare la natura di questo punto stazionario studiamo il segno della funzione derivata: $f'(x) = 3x^2 - 1 \geq 0$ per $x^2 \geq \frac{1}{3}$ ovvero per $x \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}$ oppure per $x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

La funzione è crescente per $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ e per $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$, decrescente per $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$.



Quindi il punto $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ risulta essere un punto di minimo.

7) Determinare la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy + 4y$.

La funzione è un polinomio e quindi è differenziabile. Applicando le condizioni del I ordine si ha:

$$\nabla f(x,y) = \mathbb{O} \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 2x - 3y = 0 \\ f'_y = 2y - 3x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}\,y \\ 2y - \frac{9}{2}\,y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}\,y \\ \frac{5}{2}\,y = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{8}{5} \end{cases}$$. Abbiamo quindi un solo punto stazionario: $P : \left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$.

Da $\mathbb{H}(x,y) = \mathbb{H}\left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}$ risulta $|\mathbb{H}_2| = 4 - 9 < 0$ per cui $P : \left(\frac{12}{5}, \frac{8}{5}\right)$ è un punto di sella.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 2 & k \\ k & 1 \end{Vmatrix}$ e il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$ determinare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $(1,1,1)$.

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2 & k\\ k & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1\\ 1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2-k & k-1\\ -2+2k & -k+2\\ 0+k & 0+1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}-1\\ 1\end{Vmatrix}=$$

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}-2+k+k-1\\ 2-2k-k+2\\ -k+1\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}2k-3\\ 4-3k\\ 1-k\end{Vmatrix}.$$

Affinché il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ risulti perpendicolare al vettore $(1,1,1)$ dovrà essere: $(2k-3,4-3k,1-k)\cdot(1,1,1)=0$ ovvero $2k-3+4-3k+1-k=2-2k=0$ cioé $k=1$.

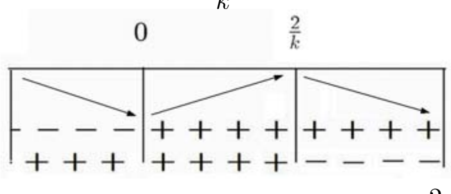
9) Date tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare se può risultare vera la proposizione $P:non\,(\mathbb{B}\ e\ \mathbb{C})\Rightarrow non\,(\mathbb{A}\ o\ \mathbb{C})$, nell'ipotesi che la proposizione $\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ sia falsa.

				P_1		P_2		
A	B	C	B e C	non (B e C)	A o C	non (A o C)	$P_1 \Rightarrow P_2$	$\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1

Come si vede dalla tabella, in terza e quarta riga, quando la proposizione $\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ è falsa allora anche la proposizione $P:non\,(\mathbb{B}\ e\ \mathbb{C})\Rightarrow non\,(\mathbb{A}\ o\ \mathbb{C})$ risulta falsa.

10) Data $f(x)=x^2\,e^{1-kx}$, con $k>0$, determinare il valore del parametro k per il quale la funzione ammette un punto di massimo in $x=1$, stabilendo anche se si tratti di estremo assoluto o relativo.

La funzione $f(x)=x^2\,e^{1-kx}$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi usiamo il segno della sua derivata prima per risolvere il problema.
Avremo $f'(x)=2x\,e^{1-kx}-k\,x^2\,e^{1-kx}=x\,(2-kx)\,e^{1-kx}\geq 0$ se $x\,(2-kx)\geq 0$.
Combinando $x\geq 0$ con $2-kx\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{2}{k}$, ricordando che $k>0$, avremo che:



la funzione è decrescente per $x<0$, crescente per $0<x<\frac{2}{k}$, decrescente per $x>\frac{2}{k}$, per cui $x=0$ è punto di minimo mentre $x=\frac{2}{k}$ è punto di massimo. Dovrà quindi risultare $k=2$ affinchè ci sia un punto di massimo in $x=1$.
Dato poi che $\lim_{x\to-\infty}x^2\,e^{1-2x}=(\to+\infty)(\to+\infty)=+\infty$, in $x=1$ abbiamo un punto di massimo relativo.