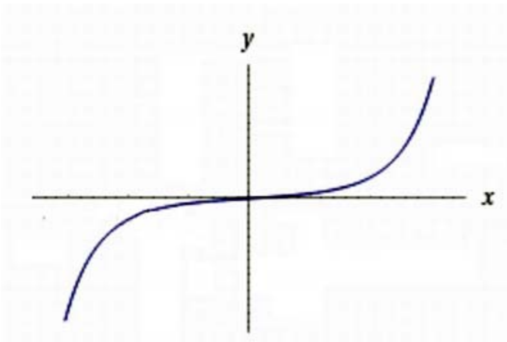
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 26/06/2023

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x\,e^{x^2}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{x^2} = (\to -\infty)(\to +\infty) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{x^2} = +\infty$.
$f(x) \geq 0$ per $x \geq 0$; $f(x) = 0$ per $x = 0$.
$f'(x) = e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = e^{x^2}\left(1+2x^2\right) > 0 \ \ \forall x$.
La funzione è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Non presenta punti di massimo o minimo.
Da $f'(x) = e^{x^2}\left(1+2x^2\right)$ avremo poi:
$f''(x) = 2x\,e^{x^2}\left(1+2x^2\right) + e^{x^2} \cdot 4x = 2x\,e^{x^2}\left(1+2x^2+2\right) = 2x\,e^{x^2}\left(2x^2+3\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$.
$f(x)$ è funzione concava per $x < 0$, $f(x)$ è funzione convessa per $x > 0$.
In $x = 0$ con $f(0) = 0$ c'è un punto di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{tg}x} \ ; \quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-1} .$$

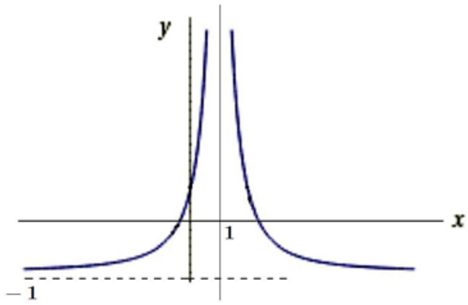
a) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{sen}x}-1}{\operatorname{tg}x} = \lim_{x\to0}\frac{(1+\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{2}}-1}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{tg}x} = \frac{1}{2}\cdot1 = \frac{1}{2} ;$$
da $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha$;

b) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x}{1+2x}\right)^{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+2x+2}{1+2x}\right)^{x-1} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{1+2x}\right)^{x-1} =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{1+2x}\right)^{1+2x}\right]^{\frac{x-1}{1+2x}} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{t}\right)^{t}\right]^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{1+2x}} = \left(e^2\right)^{\frac{1}{2}} = e .$$

3) Data una funzione $f(x)$, sapendo che $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ e che $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$, dopo aver enunciato in forma metrica la definizione per questi due limiti si disegni un possibile grafico di funzione che li rispetta entrambi.

Definizione per $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-(-1)| < \varepsilon$;
definizione per $\lim\limits_{x\to1} f(x) = +\infty$: $\forall\varepsilon\ \exists\,\delta(\varepsilon) : 0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$.

La funzione presenta un asintoto orizzontale sulla sinistra di equazione $y = -1$, presenta un punto di discontinuità di II specie in $x = 1$ con un asintoto verticale.
Un possibile grafico può essere il seguente:



4) Date le funzioni $f(x) = 3^{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $h(x) = 5x + 1$, determinare l'espressione della funzione composta $g(f(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione dell'inversa.

Risulta $g(f(h(x))) = g(f(5x+1)) = g\left(3^{(5x+1)-1}\right) = g\left(3^{5x}\right) = \dfrac{3^{5x}}{3^{5x}+1}$.
Per avere l'espressione dell'inversa, da $\dfrac{3^{5x}}{3^{5x}+1} = y$ otteniamo $3^{5x} = 3^{5x}y + y$ ovvero $3^{5x}(1-y) = y$ e quindi $3^{5x} = \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow 5x = \log_3 \dfrac{y}{1-y} \Rightarrow x = \dfrac{1}{5}\log_3 \dfrac{y}{1-y}$ da cui quindi otteniamo l'inversa: $y = \dfrac{1}{5}\log_3 \dfrac{x}{1-x} = \log_3 \sqrt[5]{\dfrac{x}{1-x}}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_1^e \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Cerchiamo anzitutto le primitive:
$\displaystyle\int \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x = \int \log^2 x\left(\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \int \log^2 x\,\mathrm{d}(\log x) = \int t^2\,\mathrm{d}t$ e quindi:
$\displaystyle\int \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{3}\log^3 x + c$. Quindi:
$\displaystyle\int_1^e \frac{\log^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\log^3 x\right|_1^e = \frac{1}{3}\left(\log^3 e - \log^3 1\right) = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$.

6) Applicare alla funzione $f(x) = \log x$ il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[1; e]$ determinando il punto nel quale il Teorema risulta soddisfatto.

La funzione è continua e derivabile per $x > 0$ e quindi in $[1; e]$.
Esiste quindi almeno un punto x_0 nel quale $f'(x_0) = \dfrac{f(e) - f(1)}{e-1}$.
Essendo $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(e) = 1$, $f(1) = 0$ avremo:
$\dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1-0}{e-1} \Rightarrow x_0 = e - 1 \in [1; e]$ che risulta il punto nel quale è soddisfatto il Teorema.

7) Data la funzione $f(x,y) = \left(x^2 - y\right) e^{x-y}$, si determini se $(0,0)$ risulta essere un suo punto stazionario.

Per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un punto stazionario è un punto nel quale si annulla il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(2x\, e^{x-y} + \left(x^2 - y\right) e^{x-y};\, - e^{x-y} - \left(x^2 - y\right) e^{x-y}\right)$ ovvero
$\nabla f(x,y) = \left(\left(x^2 + 2x - y\right) e^{x-y};\, - \left(x^2 - y + 1\right) e^{x-y}\right)$ e quindi:
$\nabla f(0,0) = (0;\, -1)$ ovvero il punto $(0,0)$ non risulta essere un suo punto stazionario.

8) Date le matrici $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$, determinare la relazione geometrica che intercorre tra questo vettore $\mathbb{X}$ ed il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$.

Dato che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = \begin{Vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 9-1 & -3+3 \\ 3-3 & -1+9 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix}$ e quindi:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 8x \\ 8y \end{Vmatrix} = 8 \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix}$.
Quindi i vettori $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} \cdot \mathbb{X}$ e $\mathbb{X}$ sono due vettori paralleli.

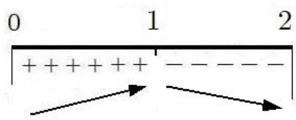
9) Determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $P : (\mathbb{A} \Rightarrow non\, \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$ sapendo che la proposizione $(non\, \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ risulta falsa.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\, \mathbb{B}$	$\mathbb{A} \Rightarrow non\, \mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$	P	$non\, \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0

Come si vede dalla tabella, in quarta riga, quando la proposizione $(non\, \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{A})$ è falsa allora la proposizione $P : (\mathbb{A} \Rightarrow non\, \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})$ risulta vera.

10) Determinare per la funzione $f(x) = x\, e^{1-x}$ i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, nell'intervallo $[0; 2]$.

La funzione $f(x) = x\, e^{1-x}$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi usiamo il segno della sua derivata prima per risolvere il problema.
Avremo $f'(x) = e^{1-x} - x\, e^{1-x} = (1-x)\, e^{1-x} \geq 0$ se $1 - x \geq 0$ ovvero per $x \leq 1$.
Quindi avremo:



per cui la funzione è crescente per $0 < x < 1$, decrescente per $1 < x < 2$, e quindi $x = 1$ è il punto di massimo assoluto mentre $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di minimo.
Dato che $f(0) = 0 < f(2) = \dfrac{2}{e}$, il punto $x = 0$ è il punto di minimo assoluto mentre il punto $x = 2$ risulta di minimo relativo.