COMPITO di MATEMATICA GENERALE 28/08/2023

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = x\log^2 x$.

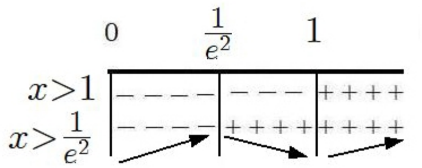
C.E.: $x > 0$. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log^2 x = 0^+$ mentre $\lim\limits_{x\to+\infty} x\log^2 x = +\infty$.
Infatti, dato che $\lim\limits_{x\to 0^+} x\log^2 x$ si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$, applichiamo la regola di De l'Hopital ed avremo:

$$\lim_{x\to 0^+} x\log^2 x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log^2 x}{\frac{1}{x}} \overset{\mathbb{H}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x\cdot\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x}{-\frac{1}{x}} \overset{\mathbb{H}}{\Rightarrow} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\,\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0^+ .$$

$f(x) \geq 0$ per $x > 0$; $f(x) = 0$ per $x = 1$.

$f'(x) = \log^2 x + x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x} = \log^2 x + 2\log x = \log x\cdot(\log x + 2) > 0$ per

$\begin{cases}\log x > 0\\ \log x + 2 > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x > 1\\ \log x > -2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x > 1\\ x > e^{-2} = \frac{1}{e^2}\end{cases}$ e quindi:



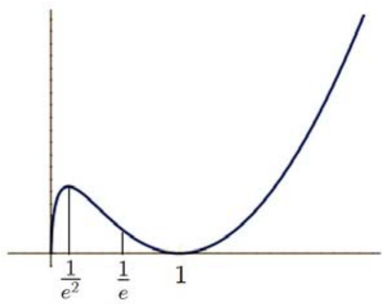
La funzione è crescente per $0 < x < \dfrac{1}{e^2}$ e per $x > 1$, decrescente per $\dfrac{1}{e^2} < x < 1$.
Quindi in $x = \dfrac{1}{e^2}$ abbiamo un punto di massimo relativo, con $f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$, in $x = 1$ un punto di minimo assoluto.
Da $f'(x) = \log^2 x + 2\log x$ avremo poi:

$f''(x) = 2\log x\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{x}\cdot(\log x + 1) > 0$ per $\log x > -1 \Rightarrow x > \dfrac{1}{e}$.

$f(x)$ è funzione concava per $0 < x < \dfrac{1}{e}$, $f(x)$ è funzione convessa per $x > \dfrac{1}{e}$.

In $x = \dfrac{1}{e}$ con $f\left(\frac{1}{e}\right) = \dfrac{1}{e}$ c'è un punto di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x} - 2^x}{x} \; ; \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3 + 2x - \log x}{1 + 2\log x}\right)^x .$$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x} - 2^x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3^{\operatorname{sen} x} - 1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{x} - \frac{2^x - 1}{x} = \log 3 - \log 2 = \log\frac{3}{2}$;

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3+2x-\log x}{1+2\log x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{2\log x}\right)^x = (\to +\infty)^{(\to+\infty)} = +\infty$
in quanto, per $x\to +\infty$, risulta $\log x = o(x)$.

3) Date le funzioni $f(x)=2x+1$ e $g(x)=x-2$, relativamente alle relazioni di equivalenza asintotica e di "o piccolo", si determini se e dove può risultare $f(x)\sim g(x)$, dove $f(x)=o(g(x))$ e dove $g(x)=o(f(x))$.

Per definizione, scriviamo $f(x)\sim g(x)$ per $x\to x_0\in\widetilde{\mathbb{R}}$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ mentre scriviamo $f(x)=o(g(x))$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ e $g(x)=o(f(x))$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}=0$.
Affinchè risulti $\lim_{x\to x_0}\frac{2x+1}{x-2}=1$, non potendo questo avvenire per $x\to\infty$, dovrà essere:
$2x+1=x-2\Rightarrow x=-3$ ed infatti $\lim_{x\to-3}\frac{2x+1}{x-2}=\frac{-6+1}{-3-2}=\frac{-5}{-5}=1$.
Risulta $2x+1=o(x-2)$ se $\lim_{x\to-\frac{1}{2}}\frac{2x+1}{x-2}=\frac{-1+1}{-\frac{1}{2}-2}=\frac{0}{-\frac{5}{2}}=0$;
quindi $2x+1=o(x-2)$ se $x\to -\frac{1}{2}$;
Risulta $x-2=o(2x+1)$ se $\lim_{x\to2}\frac{x-2}{2x+1}=\frac{2-2}{4+1}=\frac{0}{5}=0$;
quindi $x-2=o(2x+1)$ se $x\to 2$.

4) Date le funzioni $f(x)=3^x$ e $g(x)=2x-5$, sia $h(x)=g(1+2f(x))$; dopo aver determinato l'espressione della funzione $h(x)$, di questa si determini poi l'espressione dell'inversa.

Risulta $h(x)=g(1+2f(x))=g(1+2\cdot3^x)=2(1+2\cdot3^x)-5=2+4\cdot3^x-5$ per cui:
$h(x)=4\cdot3^x-3$. Da $h(x)=4\cdot3^x-3=y\Rightarrow 4\cdot3^x=y+3\Rightarrow 3^x=\frac{y+3}{4}$ ovvero:
$x=\log_3\frac{y+3}{4}$ da cui l'inversa $h^{-1}(x)=\log_3\frac{x+3}{4}$.

5) Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$.

Cerchiamo anzitutto le primitive, osservando che $\cos x$ è la derivata di $1+\operatorname{sen} x$ per cui:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x=\left(\log(1+\operatorname{sen} x)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\log\left(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)-\log(1+\operatorname{sen}0)$ e quindi:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x=\log(1+1)-\log(1+0)=\log2-0=\log2$.

6) Data la funzione $f(x)=\log(1-\log x)$, dopo averne determinato il Campo di esistenza, si determini l'equazione della retta tangente al grafico di tale funzione nel punto $x_0=1$.

Dovrà essere $\begin{cases}x>0\\1-\log x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\\log x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x<e\end{cases}$. Quindi *C.E.*: $0<x<e$.
L'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0=1$ è dato dalla:
$y-f(1)=f'(1)(x-1)$ per cui, essendo $f(1)=\log(1-\log1)=\log1=0$, mentre da:

$f'(x) = \dfrac{1}{1-\log x} \cdot \left(-\dfrac{1}{x}\right)$ otteniamo $f'(1) = \dfrac{1}{1-\log 1} \cdot \left(-\dfrac{1}{1}\right) = -1$ per cui l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $x_0 = 1$ sarà:
$y - 0 = -1\,(x-1) \Rightarrow y = -x+1$.

7) Data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(3x^2 - y; 3y^2 - x\right)$ per cui:
$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 3y^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 3(3x^2)^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3x^2 \\ 27x^4 - x = x\,(27x^3 - 1) = 0 \end{cases}$ da cui:
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \sqrt[3]{\frac{1}{27}} = \frac{1}{3} \\ y = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \end{cases}$. Abbiamo due punti stazionari: $(0,0)$ e $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{Vmatrix}$ avremo:
$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo $|\mathbb{H}_2(0,0)| = -1 < 0$, il punto $(0,0)$ è un punto di sella; infine:
$\mathbb{H}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo $\begin{cases} |\mathbb{H}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)| = 4 - 1 = 3 > 0 \end{cases}$, il punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k \\ 1 \\ k \end{Vmatrix}$, si determini per quale valore del parametro k il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $(10, 8, 2)$ e per quale valore risulta invece perpendicolare al vettore $(1, 1, 1)$.

Dato che $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k \\ 1 \\ k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k+1+k \\ k+0+k \\ 0-1+k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2k+1 \\ 2k \\ k-1 \end{Vmatrix}$ e quindi:
$(2k+1, 2k, k-1)$ risulta parallelo a $(10, 8, 2)$ se $\dfrac{2k+1}{10} = \dfrac{2k}{8} = \dfrac{k-1}{2}$ vera per $k = 2$;
$(2k+1, 2k, k-1)$ risulta perpendicolare a $(1,1,1)$ se $(2k+1, 2k, k-1) \cdot (1,1,1) = 0$ ovvero se $2k + 1 + 2k + k - 1 = 5k = 0$ vera per $k = 0$.

9) Determinare se risulta una tautologia la proposizione $P : (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B}) \Rightarrow ((\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})\, o\, \mathbb{B})$.

Formando la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A}$	$(\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})\, o\, \mathbb{B}$	$(\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B}) \Rightarrow ((\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})\, o\, \mathbb{B})$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1

come si vede dalla seconda riga, la proposizione $P : (\mathbb{A}\, e\, non\, \mathbb{B}) \Rightarrow ((\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{A})\, o\, \mathbb{B})$ non risulta una tautologia.

10) Determinare per la funzione $f(x) = e^{1+x} + e^{1-x}$ i punti di massimo e di minimo, relativi ed assoluti, nell'intervallo $[-1;\ +1]$.

La funzione $f(x) = e^{1+x} + e^{1-x}$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi usiamo il segno della sua derivata prima per risolvere il problema. Avremo:
$f'(x) = e^{1+x} - e^{1-x} = e \cdot e^x - e \cdot e^{-x} = e \cdot \left(e^x - \dfrac{1}{e^x}\right) = e \cdot \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} > 0$ se:
$e^{2x} - 1 > 0$ ovvero per $e^{2x} > 1 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$.
La funzione è decrescente per $-1 < x < 0$, crescente per $0 < x < 1$, e quindi $x = 0$ è il punto di minimo assoluto, con $f(0) = 2e$ mentre $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di massimo.
Dato che $f(-1) = f(1) = 1 + e^2$, i punti $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di massimo assoluto.