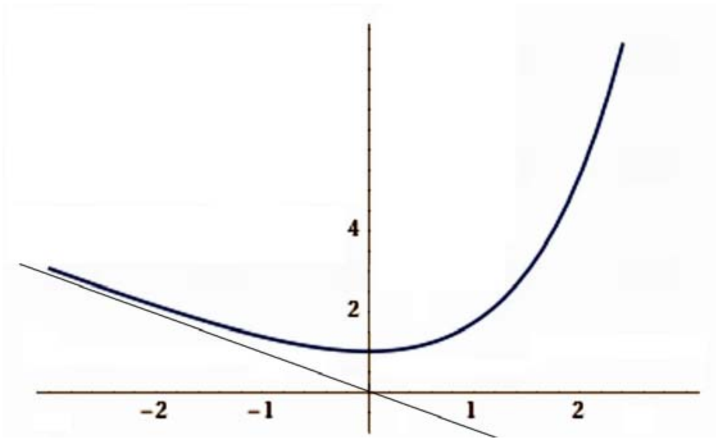
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 12/09/2023

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^x - x$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = 0 - (-\infty) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{x}{e^x}\right) = +\infty\cdot(1-0) = +\infty, x = o(e^x)$ per $x \to +\infty$.
$f(x) > 0$ per $e^x > x$, vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$.
$f'(x) = e^x - 1 > 0$ per $e^x > 1 \Rightarrow x > 0$ e quindi la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$. Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo assoluto.
Da $f'(x) = e^x - 1$ avremo poi $f''(x) = e^x > 0$, vera $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
$f(x)$ è funzione convessa $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Non ci sono punti di flesso.
Per completezza di studio vediamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui.
Da $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - x}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x}{x} = -1$ otteniamo come possibile coefficiente angolare dell'asintoto $m = -1$.
Poi da $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - mx = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x - x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 = q$ vediamo che l'asintoto obliquo sulla sinistra esiste ed ha equazione $y = mx + q = -x$.
Da $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ vediamo come non esista asintoto obliquo sulla destra.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0} \frac{x\cdot\operatorname{tg} 2x}{1-\cos x}\,;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x-8}{2x+1}\right)^{1-x}.$$

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\cdot\operatorname{tg} 2x}{1-\cos x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{1-\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{2x}\cdot 2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 1\cdot 2 = 2\cdot 2 = 4$;

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-8}{2x+1}\right)^{1-x} = \left(\to\dfrac{3}{2}\right)^{(\to-\infty)} = 0^+$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3^x + 1$ e $g(x) = x - 2$, relativamente alla relazione di "o piccolo", si determini se e dove può risultare $f(x) = o(g(x))$ e dove $g(x) = o(f(x))$.

Per definizione, scriviamo $f(x) = o(g(x))$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ e scriviamo $g(x) = o(f(x))$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Risulta $3^x + 1 = o(x-2)$ se $\lim_{x \to -\infty} \frac{3^x + 1}{x-2} = \frac{\to (0+1)}{\to (-\infty - 2)} = \frac{\to 1}{\to (-\infty)} = 0^-$;
quindi $3^x + 1 = o(x-2)$ se $x \to -\infty$;
Risulta $x - 2 = o(3^x + 1)$ se $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{3^x+1} = \frac{2-2}{9+1} = \frac{0}{10} = 0$;
risulta $x - 2 = o(3^x + 1)$ se $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-2}{3^x+1} = \frac{\to (+\infty)}{\to (+\infty)} = 0$ in quanto $x = o(3^x)$ quando $x \to +\infty$, e quindi $x - 2 = o(3^x + 1)$ se $x \to 2$ e se $x \to +\infty$.

4) Date le funzioni $f(x) = 2^{1-x}$ e $g(x) = 2x + 1$, sia $h(x) = g(1 + f(-x) \cdot f(2x))$; dopo aver determinato l'espressione della funzione $h(x)$, di questa si determini poi l'espressione dell'inversa.

Risulta
$h(x) = g(1 + f(-x) \cdot f(2x)) = g\left(1 + 2^{1+x} \cdot 2^{1-2x}\right) = g\left(1 + 2^{1+x+1-2x}\right) = g\left(1 + 2^{2-x}\right) =$
$h(x) = 2\left(1 + 2^{2-x}\right) + 1 = 2 + 2 \cdot 2^{2-x} + 1 = 2^{2-x+1} + 3 = 2^{3-x} + 3$ per cui :
$h(x) = 2^{3-x} + 3$.
Da $h(x) = 2^{3-x} + 3 = y \Rightarrow 2^{3-x} = y - 3 \Rightarrow 3 - x = \log_2 (y-3) \Rightarrow x = 3 - \log_2 (y-3)$ ovvero $x = \log_2 8 - \log_2 (y-3) = \log_2 \frac{8}{y-3}$ da cui l'inversa $h^{-1}(x) = \log_2 \frac{8}{x-3}$.

5) Calcolare $\int_0^3 \left(x - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x$.

Cerchiamo una primitiva, osservando che $\frac{1}{x+1}$ è la derivata di $\log(1+x)$ per cui:
$\int_0^3 \left(x - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} - \log(1+x)\right|_0^3 = \left[\frac{9}{2} - \log(1+3)\right] - \left[\frac{0}{2} - \log(1+0)\right] =$
$= \frac{9}{2} - \log 4 - 0 = \frac{9}{2} - \log 4$ e quindi: $\int_0^3 \left(x - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \frac{9}{2} - \log 4$.

6) Data la funzione $f(x) = \log(1 + \log x)$, dopo averne determinato il Campo di esistenza, sapendo che il differenziale $\mathrm{d}f(1)$ risulta uguale a $0,3$, si determini il valore dell'incremento $\mathrm{d}x$ in base al quale è stato calcolato tale differenziale.

Per il Campo di esistenza dovrà essere:
$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \log x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log x > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > \frac{1}{e} \end{cases}$. Quindi *C.E.*: $x > \frac{1}{e}$.
Il differenziale della funzione $f(x)$ nel punto x_0 per un incremento pari a $\mathrm{d}x$ risulta dato da $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$ e quindi, dato che $f'(x) = \frac{1}{1 + \log x} \cdot \frac{1}{x}$ sarà $f'(1) = \frac{1}{1+0} \cdot \frac{1}{1} = 1$ per cui avremo $\mathrm{d}f(1) = f'(1) \cdot \mathrm{d}x = 1 \cdot \mathrm{d}x = 0,3$ e quindi $\mathrm{d}x = 0,3$.

7) Data la funzione $f(x,y)=3x^2-2y^3-x+24y$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y)=\left(f'_x, f'_y\right)=\left(6x-1;\,-6y^2+24\right)$ per cui:
$\begin{cases}6x-1=0\\24-6y^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\6(4-y^2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\y^2=4\end{cases}$ da cui:
$\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\y=2\end{cases}\cup\begin{cases}x=\frac{1}{6}\\y=-2\end{cases}$. Abbiamo due punti stazionari: $\left(\frac{1}{6},2\right)$ e $\left(\frac{1}{6},-2\right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix}6 & 0\\0 & -12y\end{Vmatrix}$ avremo:
$\mathbb{H}\left(\frac{1}{6},2\right)=\begin{Vmatrix}6 & 0\\0 & -24\end{Vmatrix}$ per cui, essendo $\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{6},2\right)\right|=-144<0$, il punto $\left(\frac{1}{6},2\right)$ è un punto di sella; infine:
$\mathbb{H}\left(\frac{1}{6},-2\right)=\begin{Vmatrix}6 & 0\\0 & 24\end{Vmatrix}$ per cui, essendo $\begin{cases}\left|\mathbb{H}_1\left(\frac{1}{6},-2\right)\right|=6>0\\\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{6},-2\right)\right|=144>0\end{cases}$, il punto $\left(\frac{1}{6},-2\right)$ è un punto di minimo.

8) Date le matrici $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & 1\end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}=\begin{Vmatrix}1 & 0\\1 & -1\\0 & 1\end{Vmatrix}$ ed il vettore $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}k\\k\end{Vmatrix}$, si determinino i valori del parametro k per i quali il vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ ha modulo pari a 3.

Dato che :
$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0\\1 & -1\\0 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}k\\k\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}1+2+0 & 0-2-1\\2+0+0 & 0+0+1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}k\\k\end{Vmatrix}=$
$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix}3 & -3\\2 & 1\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}k\\k\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}3k-3k\\2k+k\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix}0\\3k\end{Vmatrix}$ e quindi avremo:
$\|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}\|=\sqrt{0^2+(3k)^2}=\sqrt{9k^2}=3\Rightarrow 9k^2=9\Rightarrow k^2=1\Rightarrow k=\pm1$.
Ci sono quindi due soluzioni: $k=1$ e $k=-1$.

9) Data la proposizione $P:(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B})$, determinare se risulta una tautologia la proposizione $non\,P$.

Formando la tavola di verità

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$non\,\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B}$	$P:(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})\Leftrightarrow(\mathbb{A}\,e\,non\,\mathbb{B})$	$non\,P$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1

come si vede dall'ultima colonna, la proposizione $non\,P$ risulta una tautologia.

10) Determinare per la funzione $f(x)=e^x-e^{-x}$ gli eventuali punti di flesso.

La funzione $f(x) = e^x - e^{-x}$ è continua e derivabile su tutto $\mathbb{R}$, quindi usiamo il segno della sua derivata seconda per risolvere il problema. Avremo:
$f'(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow f''(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^x} > 0$ se:
$e^{2x} - 1 > 0$ ovvero per $e^{2x} > 1 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0$.
La funzione è concava per $x < 0$, convessa per $0 < x$, e quindi $x = 0$ è l'unico punto di flesso, con $f(0) = 0$.