UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di
ANALISI MATEMATICA

SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

AA. 2023/24

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

Consideriamo un insieme di funzioni reali della variabile reale x, che indicheremo con $f_n(x)$, dipendenti, oltre che dalla variabile x, dall'indice naturale $n \in \mathrm{N}$.
Assegnato un valore all'indice, n_0, avremo una funzione $f_{n_0}(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; scelto invece il valore di x, diciamo x_0, otteniamo al variare di n una successione di termine generale $f_n(x_0)$.
Un insieme di funzioni così costituito prende il nome di Successione di funzioni.
Detta $\mathfrak{D}$ l'intersezione dei campi d'esistenza delle funzioni $f_n(x)$, determineremo anzitutto C, insieme dei valori $x \in \mathfrak{D}$ per cui la Successione $f_n(x)$ è convergente, ovvero l'insieme dei valori x per cui $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste ed è finito.
Chiameremo C insieme di convergenza della Successione di funzioni.
Il valore del limite dipenderà dal valore di x, e lo indicheremo con $f(x)$.
Diremo funzione limite della Successione di funzioni $f_n(x)$ la funzione $f(x) : C \to \mathbb{R}$, $x \to f(x)$, ovvero la funzione che associa ad ogni x dell'insieme di convergenza, come immagine, il valore del limite $f(x)$.
Esempio 1 : Determiniamo insieme di convergenza e funzione limite della Successione di funzioni: $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{nx}$.
Essendo, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right]^x = e^x$, si ha $C = \mathbb{R}$ e la funzione limite è la $f(x) = e^x$. Vedere Figura n. 1.

Esempio 2 : Determiniamo l'insieme di convergenza e la funzione limite della Successione di funzioni: $f_n(x) = (-1)^n \cdot e^{n(1-x^2)}$.
Si ha che $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito (e vale 0), e quindi la Successione è convergente, se risulta $1 - x^2 < 0$, ovvero per $x < -1$ e per $x > 1$.
Per $x = \pm 1$ si ha che $f_n(\pm 1) = (-1)^n$, Successione indeterminata;
per $-1 < x < 1$ la Successione non converge (diverge oscillando).
Avremo quindi che $C =]-\infty, -1[\cup]+1, +\infty[$, e che $f(x) = 0$. Vedere Figura n. 2.

Possiamo quindi formulare la:
Definizione 1 (di convergenza alla funzione limite):
Si dice che la Successione di funzioni $f_n(x)$ è convergente alla funzione limite $f(x)$ se $\forall\, x \in C$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, si può determinare in corrispondenza un indice $n = n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$, si abbia: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Ovvero: $\forall\, x \in C$ e $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

E' logico aspettarsi che l'indice $n(\varepsilon)$ dipenda non solo da ε ma anche dal punto x considerato; sarà quindi più corretto scrivere $n = n(\varepsilon, x)$.
Se la scelta di $n(\varepsilon)$ in funzione di ε può essere fatta indipendentemente da x, ovvero se, diciamo ad esempio in un certo intervallo $[a, b]$, una volta scelto ε, l'indice $n(\varepsilon)$ che si può determinare è sempre lo stesso, qualunque sia il punto x, allora la convergenza della Successione di funzioni è detta uniforme, e la precedente Definizione, per distinguerla, verrà detta invece di convergenza puntuale. Avremo quindi la
Definizione 2 (di convergenza uniforme):

Si dice che la Successione di funzioni $f_n(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ alla funzione limite $f(x)$ se $\forall\,\varepsilon>0$ si può determinare in corrispondenza un indice $n=n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\,n>n(\varepsilon)$, qualunque sia $x\in[a,b]$, si abbia $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
Ovvero: $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,n(\varepsilon):\forall\,x\in[a,b],\ n>n(\varepsilon)\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

E' di immediata dimostrazione il seguente:
Teorema 1 : Se una Successione di funzioni è convergente uniformemente in un intervallo $[a,b]$, allora in esso converge anche puntualmente, mentre non vale il viceversa.

Esempio 3 : Studiamo la Successione di funzioni $f_n(x)=2^{-nx}$.
Si vede facilmente che la Successione $f_n(x)$ è definita $\forall\,x\in\mathbb{R}$. Si ha poi che:
$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=+\infty\,,\ \forall\,x<0$;
$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=f_n(0)=1$, per $x=0$;
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0\,,\ \forall\,x>0$.
L'insieme di convergenza è quindi l'intervallo $C=[0,+\infty[$, e la funzione limite la:
$f(x)=\begin{cases}1,\text{ per } x=0\\ 0,\text{ per } x>0\end{cases}$. Vedere figura n. 3.

Vediamo poi che la Successione non è uniformemente convergente in $[0,+\infty[$.
Se imponiamo che sia $|f_n(x)-f(x)|=|2^{-nx}-0|<\varepsilon$, abbiamo che questa è verificata per $n>\dfrac{1}{x}\cdot\log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$. Posto $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{x}\cdot\log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1$, se $x\to0^+$, allora $n(\varepsilon)\to+\infty$, quindi non si può determinare un indice $n(\varepsilon)$ che dipenda solo da ε e non da x.
Consideriamo allora un intervallo del tipo $[r,+\infty[$, con $r>0$. Se prendiamo $x>r>0$, sarà: $\dfrac{1}{r}\cdot\log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)>\dfrac{1}{x}\cdot\log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$, e quindi, preso $n(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\mathrm{r}}\cdot\log_2\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)\right]+1$, si ha che $n(\varepsilon)$ non dipende più da x e la convergenza uniforme è assicurata in ogni intervallo del tipo $[r,+\infty[\,,\ \forall\,r>0$.

Vale inoltre il seguente:
Teorema 2 (condizione di Cauchy per la convergenza uniforme) :
Condizione necessaria e sufficiente affinchè una Successione di funzioni $f_n(x)$ sia uniformemente convergente in $[a,b]$ è che $\forall\,\varepsilon>0$ si possa determinare un indice $n=n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\,x\in[a,b]$ e $\forall\,n_1,n_2:n_1>n(\varepsilon)$, $n_2>n(\varepsilon)$, si abbia $|f_{n_2}(x)-f_{n_1}(x)|<\varepsilon$.
Sia poi $n_2>n_1$; ponendo $n_2=n_1+p$, la precedente condizione può essere riformulata dicendo che deve risultare $|f_{n_1+p}(x)-f_{n_1}(x)|<\varepsilon$, $\forall\,n_1>n(\varepsilon)$ e $\forall\,p$ numero naturale qualunque.
Dimostrazione: Vediamo anzitutto che la condizione è necessaria.
Se $f_n(x)$ converge uniformemente in $[a,b]$ alla $f(x)$, $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\,n(\varepsilon):\forall\,x\in[a,b]$ e $\forall\,n>n(\varepsilon)$ si ha $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ e quindi, $\forall\,p\in\mathbb{N}$, sarà anche $|f_{n+p}(x)-f(x)|<\varepsilon$.
Posto $n=n_1$, $n+p=n_2$, avremo: $|f_{n_1}(x)-f_{n_2}(x)|=$
$=|f_{n_1}(x)-f(x)-(f_{n_2}(x)-f(x))|\le|f_{n_1}(x)-f(x)|+|f(x)-f_{n_2}(x)|<2\varepsilon$,
ovvero vale la condizione di Cauchy.
La condizione è sufficiente: se è soddisfatta la condizione di Cauchy, fissato x, la successione numerica $f_n(x)$ soddisfa la condizione di Cauchy e quindi è convergente.
Detto $f(x)$ il valore del suo limite, sarà $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{p\to\infty}f_{n+p}(x)=f(x)$.

Se vale la condizione di Cauchy, $\forall\,\varepsilon > 0\,\exists\,n(\varepsilon) : \forall\,x \in [a,b], \forall\,n > n(\varepsilon)$ e $\forall p \in \mathbb{N}$, si ha che $|f_n(x) - f_{n+p}(x)| < \varepsilon$. Se facciamo tendere p a $+\infty$ in quest'ultima disequazione otteniamo che $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, cioè che la Successione di funzioni converge uniformemente in $[a,b]$ a $f(x)$.

Se nello spazio delle funzioni $f(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiamo una metrica mediante la distanza: $\mathrm{d}(f(x), g(x)) = \underset{x \in [a,b]}{\mathrm{Sup}} \{|f(x) - g(x)|\}$, si può dimostrare che vale il:

Teorema 3 : La successione di funzioni $f_n(x)$ è convergente uniformemente in $[a,b]$ alla funzione $f(x)$ se e solo se, $\forall\,x \in [a,b]$, si ha : $\lim_{n\to\infty} \underset{x \in [a,b]}{\mathrm{Sup}} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 0$.

Esempio 4 : Consideriamo la Successione di funzioni $f_n(x) = x^{n\,x^n} = e^{n\,x^n \log x}$.
Anzitutto avremo che $\mathfrak{D} =]\,0, +\infty[$.
Per $0 < x < 1$ si ha $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$;
per $x = 1$ si ha $f(1) = f_n(1) = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$;
per $x > 1$ la $f_n(x)$ è divergente.
Quindi $C =]\,0, 1]$ e la funzione limite è la $f(x) = 1$, $\forall\,x \in C$.
Se studiamo l'andamento delle funzioni $f_n(x)$, avremo $f_n'(x) = x^{n\,x^n}\, n\, x^{n-1}\,(n \log x + 1)$, per cui $f_n'(x) \geq 0$ per $x \geq \dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$. La generica $f_n(x)$ ha, per $x = \dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$, un punto di minimo di ordinata $f_n\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}\right) = \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$. All'aumentare di n $\dfrac{1}{\sqrt[n]{e}}$, ascissa del punto di minimo, tende a 1, mentre la sua ordinata rimane costante.
Essendo la funzione limite costante, $f(x) = 1$, avremo che:
$\underset{x \in C}{\mathrm{Sup}} \{|f_n(x) - f(x)|\} = 1 - \left(\dfrac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$, quantità costante e $\neq 0$, per cui la Successione di funzioni, per il Teorema 3, non può essere uniformemente convergente in $]\,0, 1]$.
Vedere Figura n. 4.

TEOREMI DELLA SCAMBIABILITA'

Diamo ora una rassegna di Teoremi che analizzano la possibilità di scambiare l'ordine di esecuzione tra l'operazione di passaggio al limite in una Successione di funzioni con quelle di derivata, d'integrale e di limite stessa. Vale anzitutto il seguente:

Teorema 4 (del limite): Sia $f_n(x)$ una Successione di funzioni uniformemente convergente ad $f(x)$ in C. Sia x_0 punto di accumulazione per C ed esista finito, $\forall\,n$, $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \mathfrak{L}_n$.
Allora esiste finito $\lim_{x\to x_0} f(x) = \mathfrak{L}$ ed è $\mathfrak{L} = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n$.

Dimostrazione: Dimostriamo anzitutto che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ esiste finito con il Teorema di Cauchy.
Per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in C$ avremo:
$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f_n(x_1) + f_n(x_1) - f_n(x_2) + f_n(x_2) - f(x_2)| \leq$
$\leq |f(x_1) - f_n(x_1)| + |f_n(x_1) - f_n(x_2)| + |f_n(x_2) - f(x_2)|$.
Per il Teorema di Cauchy sul limite, essendo $\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \mathfrak{L}_n$, scelto $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che, se $0 < |x_1 - x_0| < \delta(\varepsilon)$ e $0 < |x_2 - x_0| < \delta(\varepsilon)$ allora $|f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon$.

Essendo x_1 e x_2 punti di C ed essendo $f_n(x)$ uniformemente convergente ad $f(x)$, $\forall\, \varepsilon > 0$ si potrà determinare un $n(\varepsilon)$ tale che i rimanenti due termini siano ambedue minori di ε se $n > n(\varepsilon)$.
Quindi $|f(x_1) - f(x_2)|$ può essere resa piccola quanto si vuole, ovvero $f(x)$ ammette limite finito quando x tende ad x_0; diciamo questo limite $\mathfrak{L}$.
Dimostriamo ora che $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n = \mathfrak{L}$. Sarà:
$|\mathfrak{L}_n - \mathfrak{L}| \leq |\mathfrak{L}_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - \mathfrak{L}|$.
Il primo termine si può rendere piccolo a piacere in quanto $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \mathfrak{L}_n$; così il secondo in quanto $f_n(x)$ converge uniformemente ad $f(x)$, e così anche il terzo per quanto dimostrato in precedenza, ed il Teorema è quindi dimostrato.

Si può riassumere il Teorema del limite scrivendo che, nell'ipotesi di una convergenza uniforme :
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{L}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Come immediata conseguenza del Teorema del limite abbiamo il
Teorema 5 (della continuità): Se $f_n(x)$ è una Successione di funzioni continue in $x_0 \in C$ e se la Successione di funzioni converge uniformemente in C ad $f(x)$, allora $f(x)$ è continua in x_0.
Da questo deduciamo che se una Successione di funzioni continue ha una funzione limite discontinua, essa non può essere uniformemente convergente.

Rimanendo nell'ambito dell'ipotesi di continuità, vediamo ora un Teorema che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza uniforme in un intervallo limitato e chiuso:
Teorema 6 (del Dini): Se $f_n(x)$ è una Successione di funzioni continue in $[a,b] \subseteq C$, convergente in $[a,b]$ ad $f(x)$ in modo monotòno ($f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ oppure $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$), e se la funzione limite $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora $f_n(x)$ è convergente uniformemente in $[a,b]$.

Esempio 5 : Studiamo la Successione di funzioni $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$.
La Successione è convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e si ha:
per $x = \pm 1$: $f(\pm 1) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\pm 1) = f_n(\pm 1) = \dfrac{1}{2}$;
per $-1 < x < 1$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$;
per $|x| > 1$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
La funzione limite non è continua nei punti $x = \pm 1$, e la convergenza non può quindi essere uniforme su tutta la retta reale.
Consideriamo allora un intervallo del tipo $[-r, r]$, con $r < 1$.
In questo intervallo la funzione limite è la $f(x) = 1$, e dovremo per la definizione di limite verificare quando è soddisfatta la: $\left|\dfrac{1}{1+x^{2n}} - 1\right| < \varepsilon$.

Questa è vera se $\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} < \varepsilon \Rightarrow x^{2n} < \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, e questa è soddisfatta, essendo $x^2 < 1$, per $n > \dfrac{\log \dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}{\log x^2}$. Preso $r : 0 < x < r < 1$, sarà anche: $x^2 < r^2 < r < 1$, da cui segue $\log x^2 < \log \mathrm{r}$, ed essendo il valore di questi due logaritmi negativo, avremo:
$\dfrac{\log\left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\log r} > \dfrac{\log\left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\log x^2}$, per cui $n(\varepsilon) = \left[\dfrac{\log\left(\dfrac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)}{\log r}\right] + 1$ è l'indice cercato e la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[-r, r]$, con $r < 1$.
In maniera analoga si può verificare che la convergenza di $f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^{2n}}$ è uniforme in ogni intervallo del tipo $]-\infty, -r]$ e $[r, +\infty[$, con $r > 1$. Vedere Figura n. 5.

Usiamo poi il Teorema del limite per dimostrare il seguente:
Teorema 7 (della derivabilità): Sia $f_n(x)$ una Successione di funzioni definite e derivabili nell'intervallo $[a, b]$. Se la Successione $f_n(x)$ converge, anche solo puntualmente, ad $f(x)$ in $[a, b]$ e se la Successione di funzioni $f'_n(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$, allora $f(x)$ è derivabile in ogni punto di $[a, b]$ ed è $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$.
Dimostrazione : Preso h in modo che $x + h \in [a, b]$, definiamo una nuova Successione di funzioni della variabile h : $g_n(h)$, definite mediante i rapporti incrementali delle $f_n(x)$:
$$g_n(h) = \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h}.$$
Essendo $f_n(x)$ derivabile in $[a, b]$, sarà $\lim_{h\to 0} g_n(h) = f'_n(x)$, e basterà provare che la Successione delle $g_n(h)$ è uniformemente convergente, per applicare ad essa il Teorema del limite e dimostrare quindi il Teorema della derivabilità. Avremo che:
$$g_{n+p}(h) - g_n(h) = \frac{[f_{n+p}(x+h) - f_{n+p}(x)] - [f_n(x+h) - f_n(x)]}{h} =$$
$$= \frac{[f_{n+p}(x+h) - f_n(x+h)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{h}.$$
La funzione $f_{n+p}(x) - f_n(x)$ è continua e derivabile nell'intervallo $[x, x+h]$; per il Teorema di Lagrange esiste almeno un punto σ: $x < \sigma < x + h$, nel quale si ha che:
$$g_{n+p}(h) - g_n(h) = \frac{[f_{n+p}(x+h) - f_n(x+h)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{h} =$$
$$= [f_{n+p}(\sigma) - f_n(\sigma)]' = f'_{n+p}(\sigma) - f'_n(\sigma).$$
Essendo $f'_n(x)$ uniformemente convergente, $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon)$: se $n > n(\varepsilon), \forall\, p \in \mathbb{N}$, si ha:
$\left|f'_{n+p}(\sigma) - f'_n(\sigma)\right| < \varepsilon$, $\forall\, \sigma \in [a, b]$, e quindi $|g_{n+p}(h) - g_n(h)| < \varepsilon$.
La Successione di funzioni $g_n(h)$ è quindi uniformemente convergente, ed applicando ad essa il Teorema del limite avremo:
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} g_n(h) = \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} g_n(h).$$
Ma $\lim_{n\to\infty} \lim_{h\to 0} g_n(h) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ mentre
$$\lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} g_n(h) = \lim_{h\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x),$$
e quindi $\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = f'(x)$, ovvero il Teorema.

Esempio 6 : Verifichiamo che la Successione di funzioni $f_n(x) = x - \dfrac{x^n}{n}$ non soddisfa al Teorema della derivabilità. Determiniamo anzitutto l'insieme di convergenza e la funzione limite. Si ha:
se $x < -1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$, cioè la Successione diverge oscillando;
se $x = -1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(-1) = -1$;
se $-1 < x < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = x$;
se $x = 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = 1$;
se $1 < x$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$.
Quindi $C = [-1, 1]$ e $f(x) = x$, $\forall\, x \in C$. Consideriamo ora $f_n'(x) = 1 - x^{n-1}$.
La Successione delle derivate per $x = -1$ non converge, in quanto è indeterminata; quando $-1 < x < 1$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = 1$, mentre per $x = 1$ si ha $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(1) = 0$, quando invece è $f'(1) = 1$. Nel punto $x = 1$, quindi, la derivata della funzione limite non è uguale al limite della Successione delle derivate, e si può osservare come la Successione delle derivate $f_n'(x)$ converga in $]-1, 1]$ solo puntualmente e non uniformemente, anche se è convergente uniformemente in $[-1, 1]$ la Successione $f_n(x)$.
Vedere Figure n. 6 e n. 7.

Dimostriamo infine il
Teorema 8 (dell'integrabilità): Sia $f_n(x)$ una Successione di funzioni continue in $[a, b]$ uniformemente convergente ad $f(x)$. Definiamo una nuova Successione di funzioni, $g_n(x)$, come:
$g_n(x) = \displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$ e sia $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, con $x \in [a, b]$.
Allora $g_n(x)$ è uniformemente convergente in $[a, b]$ alla funzione limite $g(x)$, cioè:
$g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ ovvero $\displaystyle\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Dimostrazione: Dalla definizione di $g_n(x)$ e di $g(x)$ avremo:
$|g_n(x) - g(x)| = \left|\displaystyle\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right|$.
Ma $\left|\displaystyle\int_a^x (f_n(t) - f(t))\,\mathrm{d}t\right| \le \displaystyle\int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t$.
Se $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, sarà allora $|g_n(x) - g(x)| \le \varepsilon\,|x - a| \le \varepsilon\,|b - a|$ e quindi la tesi.

Esempio 7 : Verifichiamo se la Successione di funzioni $f_n(x) = n\,x\left(1 - x^2\right)^n$ soddisfa, nell'intervallo $[0, 1]$, al Teorema dell'integrabilità.
L'insieme di convergenza C è dato dall'intervallo $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, e la funzione limite è la $f(x) = 0$.
Calcoliamo $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.
Per il primo avremo, calcolato il limite, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$,
mentre per il secondo sarà $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n\,x\left(1 - x^2\right)^n \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2}$.

L'integrale del limite non è uguale al limite degli integrali. La differenza tra i due risultati è dovuta al fatto che la Successione di funzioni data non converge uniformemente nell'intervallo $[0,1]$.
La generica $f_n(x)$ presenta infatti un andamento crescente da $x=0$ fino ad un punto di massimo avente ascissa $x=\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, la cui ordinata $n\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n$ cresce illimitatamente al crescere di n, e dato che la funzione limite è la $f(x)=0$, avremo:
$\lim\limits_{n\to\infty}\ \operatorname{Sup}\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} n\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^n = +\infty$. Vedi Figura n. 8.

L'uniforme convergenza è quindi una condizione sufficiente a garantire la scambiabilità tra l'operazione di passaggio al limite in una Successione di funzioni e le operazioni di derivata, d'integrale e di limite stessa.
E' bene comunque notare come l'uniforme convergenza sia condizione sufficiente ma non necessaria per la validità di questi Teoremi. La Successione di funzioni dell'esempio 4 ha la funzione limite continua anche se non è convergente uniformemente.

SERIE DI FUNZIONI

Data una Successione di funzioni $f_n(x)$, introducendo tra i suoi elementi in modo puramente formale il simbolo di somma, definiamo una Serie di funzioni come:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x)+f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+.....$$
Se fissiamo il valore di x, otteniamo una Serie numerica, che potrà essere convergente, divergente o indeterminata. Chiameremo insieme di convergenza della Serie di funzioni l'insieme $C\subset\mathfrak{D}$, formato dai valori x che danno luogo a Serie numeriche convergenti.

CONVERGENZA PUNTUALE E UNIFORME

Analogamente alle Serie numeriche, da una Serie di funzioni definiamo una Successione di funzioni, $S_n(x)$, dette Somme (Ridotte), come: $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$.
Definizione 3 (di funzione somma):
Dicesi funzione somma della Serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, $\forall\, x\in C$, la funzione limite della Successione $S_n(x)$: $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$.
Avremo quindi la:
Definizione 4 (di convergenza puntuale):
Si dice che la Serie di funzioni $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge alla funzione somma $S(x)$ se:
$\forall\, x\in C$ e $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, n(\varepsilon) : n>n(\varepsilon) \Rightarrow |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

Come per le Successioni di funzioni, avremo la
Definizione 5 (di convergenza uniforme):

Si dice che la Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente nell'intervallo $[a,b]$ alla funzione somma $S(x)$ quando converge uniformemente in $[a,b]$ ad $S(x)$ la Successione delle Ridotte $S_n(x)$, ovvero se:
$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n(\varepsilon) : \forall\, x \in [a,b], n > n(\varepsilon) \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Esempio 8 : Consideriamo la Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}^{2n} x$.

Essa è una Serie geometrica di ragione $\operatorname{sen}^2 x$, e quindi convergerà $\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, in quanto $\left|\operatorname{sen}^2 x\right| < 1$, $\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Per $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ otterremo $\sum_{n=0}^{+\infty} 1^n$, Serie divergente.

Come Serie geometrica, la funzione somma sarà $S(x) = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}$, $\forall\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vediamo poi se la convergenza è uniforme, limitandoci, data la periodicità, all'intervallo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.
Sempre come Serie geometrica, avremo che:
$|S_n(x) - S(x)| = \left|\dfrac{1 - \operatorname{sen}^{2n} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen}^2 x}\right| < \varepsilon$ se $\dfrac{\operatorname{sen}^{2n} x}{1 - \operatorname{sen}^2 x} < \varepsilon$, da cui, posto $x \neq 0$, per $n > \dfrac{\log\left(\varepsilon\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\right)}{\log \operatorname{sen}^2 x}$. Posto $n(\varepsilon) = \left[\dfrac{\log\left(\varepsilon\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\right)}{\log \operatorname{sen}^2 x}\right] + 1$, si può vedere come, se $x \to 0^+$, allora $n(\varepsilon) \to 1$, mentre se $x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, $n(\varepsilon)$ diventa illimitatamente grande. In questo intervallo la convergenza non può essere uniforme, dato che, a parità di ε, dobbiamo scegliere $n(\varepsilon)$ sempre più grande via via che x si avvicina a $\frac{\pi}{2}$.
Consideriamo allora $r : 0 < r < \frac{\pi}{2}$. Per ogni $x \in [0, r]$, avremo $\operatorname{sen}^2 r > \operatorname{sen}^2 x$, da cui:
$\log \operatorname{sen}^2 r > \log \operatorname{sen}^2 x$, ed essendo questi due valori negativi, sarà anche:
$\dfrac{\log\left(\varepsilon\left(1 - \operatorname{sen}^2 r\right)\right)}{\log \operatorname{sen}^2 r} > \dfrac{\log\left(\varepsilon\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\right)}{\log \operatorname{sen}^2 x}$, per cui, se $n(\varepsilon) = \left[\dfrac{\log\left(\varepsilon\left(1 - \operatorname{sen}^2 r\right)\right)}{\log \operatorname{sen}^2 r}\right] + 1$, avremo garantita l'uniforme convergenza in ogni intervallo del tipo $[0, r]$, se $r < \frac{\pi}{2}$.
Vedere Figura n. 9.

Applicando il Teorema di Cauchy per l'uniforme convergenza, avremo il

Teorema 9 : Condizione necessaria e sufficiente affinchè la Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converga uniformemente in $[a,b]$ alla funzione somma $S(x)$ è che:
$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n(\varepsilon) : \forall\, x \in [a,b], \forall\, p \in \mathbb{N} : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.
Ma sarà anche:

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n+p} f_k(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| = |\mathrm{R}_{n,p}(x)| < \varepsilon$$

dove con $\mathrm{R}_{n,p}(x)$ indichiamo il Resto di ordine n, p della Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Da questo si può dedurre, ponendo $p = 1$, che $\forall\, x \in [a,b] \subset C$ risulta $\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

CONVERGENZA TOTALE
Definizione 6 (di convergenza totale):

Una Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ è detta essere totalmente convergente nell'insieme A se si può determinare una Serie numerica a termini positivi convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{M}_n$, tale che, $\forall\, x \in \mathrm{A}$ e $\forall\, n \in \mathbb{N}$ si abbia: $|f_n(x)| \leq \mathrm{M}_n$.

Vale il seguente:
Teorema 10 (di Weierstrass): Se una Serie di funzioni è totalmente convergente in A, ivi essa è anche uniformemente convergente, e la Serie numerica ottenuta dando alla x un qualunque valore in A è una Serie numerica assolutamente convergente.
Dimostrazione: Scelto $\varepsilon > 0$, $\exists\, n(\varepsilon) : \forall\, n > n(\varepsilon)$ e $\forall\, p \in \mathbb{N}$ si ha:

$$|\mathrm{R}_{n,p}(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + ... + f_{n+p}(x)| \leq$$
$$\leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + ... + |f_{n+p}(x)| \leq \mathrm{M}_{n+1} + \mathrm{M}_{n+2} + ... + \mathrm{M}_{n+p} < \varepsilon$$

in quanto la Serie $\sum_{n}^{+\infty} \mathrm{M}_n$ è convergente, e l'ultimo termine è il suo Resto di ordine n, p, e quindi il Teorema è dimostrato.

Esempio 9 : Consideriamo la Serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$.

Essendo, $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \leq \left|\frac{1}{n^3}\right| = \mathrm{M}_n$, ed essendo $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{M}_n$ convergente assolutamente, la Serie di funzioni data è convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Un modo pratico per determinare l'eventuale Serie numerica maggiorante $\sum_{n}^{+\infty} \mathrm{M}_n$ può essere quello di considerare $\sup_{x \in \mathrm{A}} |f_n(x)|$, dove A rappresenta l'insieme in cui determinare l'eventuale convergenza totale. Basterà porre $\mathrm{M}_n = \sup_{x \in \mathrm{A}} |f_n(x)|$ per avere la Serie desiderata, se questa ovviamente dovesse risultare convergente.

Vale per le Serie di funzioni anche il:

Teorema 11 (del Dini): Data una Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, se ciascuna $f_n(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a, b] \subseteq C$, se le funzioni $f_n(x)$ sono tutte positive (negative) in $[a, b]$, e se la funzione somma della Serie è continua in $[a, b]$, allora $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ converge uniformemente in $[a, b]$.
Basta osservare che il segno costante delle funzioni $f_n(x)$ implica la convergenza monotòna della Successione delle somme ridotte.

Esempio 10 : Consideriamo la Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n-(x-n)^2}$.

La generica funzione $f_n(x) = e^{-n-(x-n)^2}$, sempre positiva $\forall\, x$ e $\forall\, n$, ha per asintoto orizzontale, sia a destra che a sinistra, l'asse delle x e presenta un punto di massimo di ordinata e^{-n} nel punto di ascissa $x = n$. Posto $\mathrm{M}_n = e^{-n} = \operatorname*{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \operatorname*{Max}_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)|$, avremo che la convergenza della Serie data è totale e quindi uniforme $\forall\, x \in \mathbb{R}$ in quanto $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n}$ è convergente.

E' bene notare come questo Criterio costituisca una condizione solo sufficiente, e non necessaria, per l'uniforme convergenza di una Serie di funzioni; infatti una Serie di funzioni può essere uniformemente convergente in $[a, b]$ anche senza essere ivi totalmente convergente, così come non sono legate tra di loro la convergenza uniforme e la convergenza assoluta; in un punto x si può avere infatti una Serie assolutamente convergente senza che x faccia parte di un insieme in cui la Serie di funzioni è uniformemente convergente e viceversa.

INSIEME DI CONVERGENZA

Per la determinazione dell'insieme di convergenza di una Serie di funzioni si possono usare i normali criteri di convergenza delle Serie numeriche. Vanno ricercati i valori della variabile x per i quali il criterio usato è soddisfatto, dopodichè si devono esaminari quei valori particolari, se ce ne sono, per i quali il criterio non fornisce risposta.

Esempio 11 : Studiare la Serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + x^2}$.

Questa, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è una Serie a segni alterni, per la quale $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n + x^2} \right| = 0$, e, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, si ha: $\left| \frac{(-1)^n}{n + x^2} \right| > \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n + 1 + x^2} \right|$, quindi, per il Criterio di Leibnitz, è una Serie convergente.

Fissato x, essendo una Serie a segni alterni, sarà $|S_n(x) - S(x)| < |f_{n+1}(x)|$ da cui: $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ se $\frac{1}{n + 1 + x^2} < \varepsilon$, ovvero per $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - x^2$.

Ma $\frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{\varepsilon} - 1 - x^2$, per cui basterà prendere $n(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ per avere che la Serie di funzioni converge uniformemente su tutta la retta reale.

Se poi, fissato il valore di x, studiamo la convergenza assoluta della corrispondente Serie numerica, avremo che $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n + x^2}$ è divergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avendo lo stesso comportamento della Serie armonica (basta applicare il Criterio del Confronto asintotico).

La Serie di funzioni data converge uniformemente su tutta la retta reale senza essere, in alcun punto, assolutamente convergente. Vedere Figura n. 10.

Esempio 12 : Studiare la Serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x - 1}{x} \right)^n$.

Abbiamo che $\mathfrak{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per determinare C supponiamo fissato il valore di x, ed applichiamo alla Serie numerica ottenuta il Criterio della radice. Si ha quindi:

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right)^n \right|} = \left| \frac{x-1}{x} \right|$, e questo valore sarà minore di 1 se $x > \frac{1}{2}$.

Per $x = \frac{1}{2}$ avremo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, Serie convergente assolutamente.

Quindi $C = \left[\frac{1}{2}, +\infty \right[$.

Inoltre, $\forall x \in C$, essendo $\left| \frac{x-1}{x} \right| < 1$, si ha che $\left| \frac{1}{n^2} \cdot \left(\frac{x-1}{x} \right)^n \right| \leq \frac{1}{n^2}$, e questo è il termine generale di una Serie numerica a termini positivi e convergente, e quindi la Serie di funzioni data converge totalmente, e quindi uniformemente, $\forall x \in C$.

TEOREMI DELLA SCAMBIABILITA'

Applicando alla Successione delle Ridotte di una Serie di funzioni i Teoremi della continuità, della derivabilità e dell'integrabilità per le Successioni di funzioni, avremo subito i seguenti:

Teorema 12 (della continuità): La funzione somma di una Serie uniformemente convergente di funzioni continue in $[a, b]$ è continua in $[a, b]$.

Teorema 13 (di derivazione per Serie): Sia data una Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, derivabili in $[a, b]$, e convergente alla funzione somma $S(x)$; consideriamo la Serie derivata $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$; se essa converge uniformemente in $[a, b]$, allora la sua funzione somma è data da $\mathrm{S}'(x)$.

Si dice, in questo caso, che la Serie di funzioni è derivabile termine a termine.

Teorema 14 (di integrazione per Serie): Sia data una Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, continue in $[a, b]$ ed uniformemente convergente alla funzione somma $S(x)$; preso $x \in [a, b]$, definiamo una Successione di funzioni, $g_n(x)$, nel modo seguente:

$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t$, e sia $g(x) = \int_a^x \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t$.

Allora $g_n(x)$ converge uniformemente a $g(x)$ in $[a, b]$, ovvero si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} g_n(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_a^x f_k(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \int_a^x \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^x \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t = g(x).$$

SERIE DI POTENZE

Le Serie di potenze non sono altro che quelle particolari Serie di funzioni esprimibili nella forma: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$, dove x_0 è un qualunque numero reale e gli a_n sono gli elementi di una Successione numerica; x_0, per motivi che vedremo in seguito, è detto centro della Serie di potenze.

INTERVALLO DI CONVERGENZA

Si può dimostrare che l'insieme di convergenza di una Serie di potenze è sempre costituito da un intervallo, simmetrico rispetto al punto x_0.
Per vedere questo, osserviamo anzitutto come ogni Serie di potenze sia convergente nel suo centro $x = x_0$, riducendosi ogni termine, eccettuato tutt'al più il primo, a zero, e dimostriamo poi il
Teorema 15 : Se una Serie di potenze è convergente in un punto x_1, allora essa è convergente assolutamente in ogni punto x tale che : $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.
Dimostrazione : Supponiamo che la Serie di potenze sia convergente in un punto $x_1 \neq x_0$, e consideriamo un qualunque altro punto x tale che : $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.
Essendo la Serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x_1 - x_0)^n$ per ipotesi convergente, il suo termine generale tende a zero, e quindi, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n (x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$.
Allora, per quegli x tali che : $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ risulterà che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$:
$|a_n (x - x_0)^n| = |a_n (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n} \right| < \varepsilon \cdot \left| \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \right|^n$,
termine generale di una Serie geometrica di ragione $\left| \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} \right| < 1$, quindi convergente; usando il Criterio del confronto il Teorema è allora dimostrato.
La convergenza in un punto x_1 ci assicura quindi la convergenza non solo semplice ma anzi assoluta all'interno di un intervallo di centro x_0 ed ampiezza $|x_1 - x_0|$.
Diamo quindi la
Definizione 7 (di raggio di convergenza):
Dicesi raggio di convergenza di una Serie di potenze l'estremo superiore dei numeri $|x - x_0|$ per cui la serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$ risulta convergente. Denotiamo il raggio di convergenza con ρ.

Il Teorema 15 ci assicura che ogni Serie di potenze è assolutamente convergente all'interno dell'intervallo di convergenza, non convergente all'esterno, mentre nulla si può dire riguardo ai due punti estremi $x_0 - \rho$ e $x_0 + \rho$, nei quali si tratterà di valutare caso per caso.
Se $\rho = 0$, la Serie di potenze è convergente solo nel centro x_0, mentre se $\rho = +\infty$ la Serie di potenze è convergente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
Vale poi il seguente :
Teorema 16 : Una Serie di potenze converge totalmente, e quindi uniformemente, in ogni intervallo $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$.
Dimostrazione: Sia $[a, b] \subset]x_0 - \rho, x_0 + \rho[$ e sia, ad esempio, $|b - x_0| > |a - x_0|$.
La Serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (b - x_0)^n$ è convergente, in quanto b è punto interno all'intervallo di convergenza, e quindi, qualunque sia $x \in [a, b]$, sarà:
$|a_n (x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |(x - x_0)^n| \leq |a_n| \cdot |(b - x_0)^n| = \mathrm{M}_n$,
e la Serie di potenze è allora totalmente e quindi uniformemente convergente in $[a, b]$.

Riguardo alla determinazione del raggio di convergenza, valgono i seguenti:
Teorema 17 : Se $a_n \neq 0, \forall\, n$, e se esiste $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$, si ha che $\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

Dimostrazione: Per il Criterio del rapporto, supposto di aver fissato il valore di x, la Serie numerica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$ sarà convergente se risulta minore di 1 il limite:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n (x-x_0)^n}\right| = |x-x_0|\cdot \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\text{ ovvero se } |x-x_0| < \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Esempio 13 : Determiniamo dove converge la Serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n\,!}\cdot (x-3)^n$.

Il centro della Serie è il punto $x=3$. Calcolando il raggio di convergenza, si ha:
$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2+1}{n\,!}\cdot\frac{(n+1)\,!}{n^2+2n+2}\right| = +\infty$, quindi la Serie di potenze è convergente su tutta la retta reale.

Esempio 14 : Studiare la Serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\,!}{n+1}\cdot x^n$.

Il centro della Serie è il punto $x=0$. Calcolando il raggio di convergenza, si ha:
$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n\,!}{n+1}\cdot\frac{n+2}{(n+1)\,!}\right| = 0$, e quindi la Serie converge solo nel centro $x=0$, dove la sua Somma è $S=a_0=1$.

Con analoga procedura di dimostrazione, si prova che vale il:

Teorema 18 : Se $a_n \neq 0$, $\forall\, n$, e se esiste $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, si ha che $\rho = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Esempio 15 : Studiamo la Serie di potenze $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n$, con $a_n = \begin{cases} 1 & \text{per n pari} \\ 2 & \text{per n dispari'} \end{cases}$

cioè: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-1)^n = 1 + 2(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^3 + (x-1)^4 + ...$

Se per determinare il raggio di convergenza calcoliamo $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, avremo che tale limite non esiste, assumendo il quoziente valore 2 per n dispari e valore $\frac{1}{2}$ per n pari. Abbiamo invece:

$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = 1$, e quindi $\rho = 1$. Essendo il centro nel punto $x=1$, la Serie di potenze data converge almeno in $]0,2[$. Esaminiamo infine il comportamento negli estremi.

Per $x=0$ si ha: $1 + 2(-1) + (-1)^2 + 2(-1)^3 + (-1)^4 + ... = 1-2+1-2+1-...$, Serie a Segni alterni, il cui termine generale non tende a zero, e che si vede facilmente essere divergente negativamente.

Per $x=2$ si ha invece : $1+2+1+2+1+...$, Serie divergente positivamente.

Quindi $C =]0,2[$.

Dato che massimo e minimo limite esistono per qualunque Successione, il Teorema 18 può essere enunciato nella sua forma più generale, ovvero:

Teorema 19 : Se $a_n \neq 0$, $\forall\, n$, allora $\rho = \frac{1}{\operatorname{Max}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Non vale un analogo di quest'ultimo Teorema per $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

FUNZIONE SOMMA
Come per tutte le Serie di funzioni, ad ogni Serie di potenze potremo associare la sua funzione somma $S(x)$, e scriveremo, anche se solo formalmente $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_0)^n$.
Applichiamo alle Serie di potenze, che sappiamo essere uniformemente convergenti per il Teorema 16, i Teoremi di continuità, di derivazione ed integrazione per Serie, ed avremo anzitutto il:
Teorema 20 : La funzione somma di una Serie di potenze è continua all'interno dell'intervallo di convergenza.

Questo Teorema può essere esteso anche agli estremi dell'intervallo, mediante il
Teorema 21 (di Abel): Se una Serie di potenze è convergente anche in uno degli estremi dell'intervallo di convergenza, allora la funzione somma risulta, in questo estremo, continua (solo da destra o solo da sinistra a seconda che l'estremo considerato sia l'inferiore o il superiore dell'intervallo di convergenza).

Vale poi il
Teorema 22 (di derivazione per Serie di potenze): Ogni Serie di potenze è derivabile termine a termine all'interno dell'intervallo di convergenza; la Serie derivata ha lo stesso raggio di convergenza (nulla si può dire per gli estremi dell'intervallo), e la sua funzione somma è la derivata della funzione somma della Serie di potenze, ovvero:
se $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x-x_0)^n$ allora $S'(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n\,a_n\,(x-x_0)^{n-1}$.

Esempio 16 : Studiamo la Serie di potenze $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{n^2+1}\cdot(x+1)^n$.
Il centro della Serie è il punto $x=-1$. Determiniamo poi il raggio di convergenza mediante il $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Avremo $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{n}{n^2+1}\cdot\dfrac{n^2+2n+2}{n+1}\right|=1$.
Quindi la Serie converge almeno in $]-2,0[$. Analizziamo infine il carattere nei due estremi.
Per $x=-2$ avremo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{n}{n^2+1}$, che si vede essere convergente con il Criterio di Leibnitz; per $x=0$ otteniamo invece $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n}{n^2+1}$, che si vede essere divergente mediante confronto asintotico con la Serie Armonica. L'intervallo di convergenza è allora $[-2,0[$.
Studiamo poi la Serie derivata di questa Serie di potenze: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}\cdot(x+1)^{n-1}$.

Essa converge almeno in $]-2,0[$. Per $x=-2$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2}{n^2+1}$, Serie a segni alterni che non converge in quanto il suo termine generale non tende a zero, mentre per $x=0$ si ha $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$, Serie chiaramente divergente, per cui $C=]-2,0[$.

Esempio 17 : Studiare la Serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2\cdot 2^n}$.

Il centro è $x=-1$, e per il raggio di convergenza si ha $\rho=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}=2$, per cui la Serie converge almeno in $]-3,1[$. Valutando poi gli estremi:

per $x=-3$ abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, Serie convergente assolutamente, e

per $x=1$ abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, Serie anche questa convergente assolutamente.

L'intervallo di convergenza è quindi dato da $[-3,1]$.

Consideriamo ora la Serie derivata : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^{n-1}}{n\,2^n}$, e vediamone il carattere negli estremi dell'intervallo $]-3,1[$. Nel punto $x=-3$ otteniamo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\,n}$, Serie a segni alterni convergente semplicemente, ma non assolutamente, mentre per $x=1$ abbiamo $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n}$, cioè la Serie armonica, divergente. Quindi l'intervallo di convergenza della Serie derivata è $[-3,1[$.

Vale infine il

Teorema 23 (di integrazione per Serie di potenze): Se $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(x-x_0)^n$, e se l'intervallo $[a,b]$ è contenuto nell'intervallo di convergenza della Serie di potenze, allora, $\forall\, x\in[a,b]$ si ha:

$$\int_a^x \mathrm{S}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^x\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\,(t-x_0)^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^x a_n\,(t-x_0)^n\mathrm{d}t=$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\left[\frac{(x-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}}{n+1}\right].$$

POLINOMIO DI TAYLOR

Data una funzione $f(x)$, vogliamo determinare un polinomio di grado n, che indicheremo con $\mathrm{P}_n(x,x_0)$, che possa essere utilizzato per calcolare valori approssimati della funzione.

Affinchè tale approssimazione sia valida vogliamo che l'errore che si commette sostituendo alla funzione $f(x)$ il polinomio $\mathrm{P}_n(x,x_0)$ tenda a zero più rapidamente di $(x-x_0)^n$, quando $x\to x_0$, con n numero naturale da scegliersi opportunamente.

Questo corrisponde ad imporre che sia: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-\mathrm{P}_n(x,x_0)}{(x-x_0)^n}=0$, ovvero che risulti:

$f(x)-\mathrm{P}_n(x,x_0)=o((x-x_0)^n)$.

Si dimostra che ciò è possibile se la funzione $f(x)$ risulta derivabile n volte in un intorno del punto x_0, e se valgono le $n+1$ uguaglianze: $\begin{cases} f(x_0) = \mathrm{P}_n(x_0, x_0) \\ f^{(k)}(x_0) = \mathrm{P}_n^{(k)}(x_0, x_0) \end{cases}$, $\forall\, k : 1 \leq k \leq n$, ovvero se nel punto x_0 coincidono i valori della funzione e del polinomio e delle loro derivate fino all'ordine n.
Infatti, nel $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - \mathrm{P}_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n}$, il denominatore, per $x \to x_0$, risulta infinitesimo; quindi il numeratore, affinchè tutto tenda a zero, deve anch'esso tendere a zero; otterremo allora la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ se poniamo che sia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \mathrm{P}_n(x_0, x_0)$, ovvero che la funzione $f(x)$ sia continua nel punto x_0.
Supponendo poi che la funzione $f(x)$ sia derivabile in un intorno di x_0, possiamo applicare la Regola di De L'Hopital, e calcolare $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - \mathrm{P}'_n(x, x_0)}{n\,(x - x_0)^{n-1}}$.
Il denominatore tende ancora a zero per cui, ripetendo il ragionamento precedente, otterremo la forma indeterminata $\dfrac{0}{0}$ se supponiamo che sia $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0) = \mathrm{P}'_n(x_0, x_0)$; per ottenere questo occorre che anche la funzione $f'(x)$ sia continua nel punto x_0.
Ripetendo n volte tale procedura, e supponendo di volta in volta la funzione $f(x)$ ulteriormente derivabile nell'intorno di x_0, si arriverà, dopo aver applicato n volte la Regola di De L'Hopital, a calcolare $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^{(n)}(x) - \mathrm{P}_n^{(n)}(x, x_0)}{n!}$, e questo risulterà infine uguale a zero se poniamo che sia $\lim\limits_{x \to x_0} f^{(n)}(x) = f^{(n)}(x_0) = \mathrm{P}_n^{(n)}(x_0, x_0)$, ovvero l'ultima delle condizioni richieste.
Le $n+1$ condizioni $\begin{cases} f(x_0) = \mathrm{P}_n(x_0, x_0) \\ f^{(k)}(x_0) = \mathrm{P}_n^{(k)}(x_0, x_0) \end{cases}$, $\forall\, k : 1 \leq k \leq n$, ci consentono anche di determinare i coefficienti del polinomio cercato.
Esprimiamo il polinomio $\mathrm{P}_n(x, x_0)$ mediante le potenze del binomio $(x - x_0)$ e poniamo:
$\mathrm{P}_n(x, x_0) = a_n\,(x - x_0)^n + a_{n-1}\,(x - x_0)^{n-1} + \;...\; + a_1\,(x - x_0) + a_0$.
Imponiamo poi che nel punto x_0 coincidano i valori del polinomio e della funzione, nonchè di tutte le loro derivate fino all'ordine n.
Avremo, dalla $f(x_0) = \mathrm{P}_n(x_0, x_0)$:
$\mathrm{P}_n(x_0, x_0) = a_n\,(x_0 - x_0)^n + a_{n-1}\,(x_0 - x_0)^{n-1} + ... + a_1\,(x_0 - x_0) + a_0 = a_0 = f(x_0)$.
Passando alla derivata prima:
$\mathrm{P}'_n(x, x_0) = n\,a_n\,(x - x_0)^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,(x - x_0)^{n-2} + ... + 2\,a_2\,(x - x_0) + a_1$
da cui, ponendo $f'(x_0) = \mathrm{P}'_n(x_0, x_0)$, otteniamo:
$\mathrm{P}'_n(x_0, x_0) = n\,a_n\,(x_0 - x_0)^{n-1} + ... + 2\,a_2\,(x_0 - x_0) + a_1 = a_1 = f'(x_0)$.
Operando in maniera analoga dalla derivata seconda fino alla derivata n-esima si ha:
$\mathrm{P}''_n(x, x_0) = n\,(n-1)\,a_n\,(x - x_0)^{n-2} + ... + 3 \cdot 2\,a_3\,(x - x_0) + 2a_2$, da cui:
$\mathrm{P}''_n(x_0, x_0) = n\,(n-1)\,a_n\,(x_0 - x_0)^{n-2} + ... + 3 \cdot 2\,a_3\,(x_0 - x_0) + 2\,a_2 = 2\,a_2 = f''(x_0)$
e quindi ricaviamo: $a_2 = \dfrac{f''(x_0)}{2}$;
$\mathrm{P}'''_n(x_0, x_0) = 3 \cdot 2\,a_3$, e quindi $a_3 = \dfrac{f'''(x_0)}{3\,!}$;
$\mathrm{P}_n^{(4)}(x_0, x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2\,a_4$, e quindi $a_4 = \dfrac{f^{(4)}(x_0)}{4\,!}$,
per giungere infine alla:

$\mathrm{P}_n^{(n)}(x_0, x_0) = n\,(n-1)\,...\,2\,a_n$, da cui ricaviamo $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Abbiamo quindi ottenuto, per i coefficienti a_k, l'espressione $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, che, per come è stata ottenuta, risulta evidentemente unica, e quindi è unico il polinomio che con tale procedura si determina. Ponendo $f(x) = \mathrm{P}_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$, abbiamo la cosiddetta formula di Taylor:

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) .$$

Nel caso particolare $x_0 = 0$, la formula viene invece denominata polinomio di Mac Laurin.
Quanto visto finora costituisce la dimostrazione del seguente :
Teorema 24 : Data $f(x)$ continua e derivabile n volte in un intorno del punto x_0, esiste ed è unico il polinomio $\mathrm{P}_n(x, x_0)$ per il quale $f(x) = \mathrm{P}_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$ e risulta:

$$\mathrm{P}_n(x, x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k .$$

Scrivendo la formula per esteso avremo anche:

$$\mathrm{P}_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6} \cdot (x-x_0)^3 + ...$$

mentre nel caso di un polinomio di Mac Laurin si ottiene:

$$\mathrm{P}_n(x, 0) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{6} \cdot x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n .$$

Nel caso $n = 1$, ovvero del polinomio di Taylor di primo grado, ritroviamo la formula di approssimazione basata sul differenziale ovvero sull'equazione della retta tangente:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0) + o(x-x_0) .$$

Ponendo $f(x) = \mathrm{P}_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n)$, abbiamo la cosiddetta formula di Taylor:

$$f(x) = \mathrm{P}_n(x, x_0) + o((x-x_0)^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!} \cdot (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) ,$$

dalla quale, posto $\mathrm{R}_n(x, x_0) = f(x) - \mathrm{P}_n(x, x_0)$, abbiamo il cosiddetta Resto, per il quale si ha che $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\mathrm{R}_n(x, x_0)}{(x-x_0)^n} = 0$.

Vari sono i modi per rappresentare il Resto $\mathrm{R}_n(x, x_0)$, ovvero l'errore che si commette sostituendo ad $f(x)$ il polinomio $\mathrm{P}_n(x, x_0)$.
Accenniamone alcuni, senza darne dimostrazione :
Forma di Peano : Se esiste finita $f^{(n+1)}(x_0)$, si ha :

$$\mathrm{R}_n(x, x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0) + \beta(x-x_0)}{(n+1)\,!} \cdot (x-x_0)^{n+1} \text{ , con } \lim_{x \to x_0} \beta(x-x_0) = 0 .$$

Forma di Lagrange : Se $f^{(n+1)}(x)$ esiste in tutti i punti di un opportuno intorno di x_0, anche senza esistere in x_0, abbiamo la: $\mathrm{R}_n(x, x_0) = \dfrac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)\,!} \cdot (x-x_0)^{n+1}$, con σ punto opportuno tale che: $|x_0 - \sigma| < |x_0 - x|$.
Ed infine vale la:
Forma Integrale : $\mathrm{R}_n(x, x_0) = \dfrac{1}{n\,!} \cdot \displaystyle\int_{x_0}^{x} (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

SVILUPPO IN SERIE DI UNA FUNZIONE

In un ottica più generale, data una funzione $f(x)$ definita in $[a, b]$, e data una Successione di funzioni reali $g_n(x)$, definite in $[a, b]$, si cerca di determinare una Successione numerica a_n, in modo che la funzione $f(x)$ sia la funzione somma, $\forall\, x \in [a, b]$, della Serie di funzioni $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, g_n(x)$.

Se tale Successione a_n esiste, si dice che la funzione $f(x)$ è sviluppabile in Serie di funzioni $g_n(x)$ nell'intervallo $[a, b]$.

Come caso particolare, anche se a questo si ricorre con maggiore frequenza, dato un punto $x_0 \in\,]a, b[$, si vuole determinare una Serie di potenze, con centro il punto x_0, il cui intervallo di convergenza sia contenuto in $[a, b]$ e la cui funzione somma sia $f(x)$. La Serie di potenze ottenuta si dirà sviluppo della funzione $f(x)$ in Serie di Mac Laurin se $x_0 = 0$, di Taylor per ogni altro valore, e scriveremo formalmente $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!} \cdot (x - x_0)^n$.

E' naturale chiedersi quando questo sia possibile. E' facile vedere come i coefficienti a_n debbano essere costruiti con la stessa legge trovata per il Polinomio di Taylor. Sarà quindi necessario che la funzione $f(x)$ sia derivabile infinite volte nel punto x_0, per avere $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}$.

Questo però, anche se permette di scrivere l'espressione della Serie di potenze, non è comunque sufficiente a garantire che la Serie di potenze trovata abbia come funzione somma proprio la funzione $f(x)$.

Esempio 18 : La funzione $f(x) = \begin{cases} e^{-x^{-2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0 \end{cases}$, risulta continua e derivabile infinite volte nel punto $x = 0$, ma non è comunque sviluppabile in Serie di Mac Laurin.

Per la derivata della funzione nel punto $x = 0$, usando la definizione, avremo:

$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(e^{-h^{-2}} - 0\right) = 0$. Analogamente, $f''(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left(\frac{2}{h^3} \cdot e^{-h^{-2}} - 0\right) = 0$,

e così procedendo si può dimostrare che la funzione data ammette derivate di qualunque ordine nel punto $x = 0$, e che queste sono tutte nulle. La Serie di Mac Laurin che così otteniamo ha tutti i coefficienti uguali a zero, e quindi ha per funzione somma la funzione $f(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e non la funzione data.

Occorrono quindi anche condizioni sufficienti per garantire lo scopo proposto.

Vale, anzitutto, il seguente:

Teorema 25 : Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $f(x)$ sia sviluppabile in Serie di Taylor di centro il punto x_0 è che sia $\lim_{n \to +\infty} \mathrm{R}_n(x, x_0) = 0$.

Varie sono le condizioni sufficienti a garantire che il Resto $\mathrm{R}_n(x, x_0)$ sia infinitesimo al tendere di n all'infinito. Valgono, tra gli altri, i seguenti Teoremi:

Teorema 26 : Sia $f(x)$ una funzione derivabile infinite volte in un intorno $\mathfrak{J}(x_0,\, \delta)$ del punto x_0, ed esista, $\forall\, n \geq 0$ e per ogni $x \in \mathfrak{J}(x_0,\, \delta)$, un numero M tale che $\left|f^{(n)}(x)\right| < \mathrm{M}$ (si dice allora che la funzione $f(x)$ e le sue derivate sono equilimitate). Allora $f(x)$ è sviluppabile in Serie di Taylor di centro x_0.

Dimostrazione: Esprimendo $\mathrm{R}_n(x, x_0)$ nella forma di Lagrange, essendo δ l'ampiezza dell'intorno considerato, e detta $S_n(x)$ la Ridotta n-esima della Serie di potenze calcolata nel punto x, avremo:

$$|\mathrm{R}_n(x, x_0)| = |S_n(x) - f(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right|$$

Ma $\left| \dfrac{f^{(n+1)}(\sigma)}{(n+1)\,!} \cdot (x - x_0)^{n+1} \right| < \mathrm{M} \cdot \dfrac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)\,!} < \mathrm{M} \cdot \dfrac{\delta^{n+1}}{(n+1)\,!}$,

e quest'ultima è una quantità che tende a 0 se $n \to +\infty$.
Un'altra condizione sufficiente è fornita dal
Teorema 27 : Affinchè una funzione $f(x)$, derivabile infinite volte in un intorno $\mathfrak{J}(x_0, \delta)$ del punto x_0, sia sviluppabile in Serie di potenze di centro x_0, è sufficiente che esistano $\mathrm{M} \geq 0$ e $\mathrm{L} \geq 0$ tali che $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$.
La dimostrazione si ottiene rapidamente usando per il Resto la forma di Lagrange.

Con il Resto sotto forma d'integrale, un'altra condizione sufficiente è fornita dal
Teorema 28 : Affinchè la funzione $f(x)$, derivabile infinite volte in un intorno del punto x_0, sia sviluppabile in Serie di potenze di centro x_0, è sufficiente che esista una costante $\mathrm{M} > 0$ tale che:
$\left|f^{(n)}(x)\right| < \mathrm{M}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$.

Concludiamo questa breve rassegna di condizioni sufficienti per la sviluppabilità in Serie di potenze di una funzione con il
Teorema 29 (di Bernstein): Sia $f(x)$ derivabile infinite volte in $\mathfrak{J}(x_0, \delta)$, e siano $f(x) \geq 0$ e $f^{(n)}(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0, \delta)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; allora $f(x)$ è sviluppabile in Serie di potenze di centro x_0 in $\mathfrak{J}(x_0, \delta)$.

SVILUPPO IN SERIE DI MAC LAURIN DELLE FUNZIONI ELEMENTARI
Costruiremo ora gli sviluppi in Serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.

La funzione esponenziale $f(x) = e^x$
La funzione esponenziale $f(x) = e^x$ è continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, e quindi anche nel punto $x = 0$.
Avremo: $f^{(n)}(x) = e^x, \forall\, n$, da cui $f^{(n)}(0) = 1, \forall\, n$.
Preso un intorno $]-\delta, \delta[$ del punto $x = 0$, si ha: $f^{(n)}(x) = e^x < e^\delta$, $\forall x \in]-\delta, \delta[$, quindi è soddisfatta la condizione di equilimitatezza, e la funzione $f(x) = e^x$ è sviluppabile in Serie di Mac Laurin.
Dato che $f^{(n)}(0) = 1$, $\forall\, n$, otteniamo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}.$$

Se calcoliamo il raggio di convergenza di questa Serie di potenze, avremo:

$$\rho = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n\,!} \cdot (n+1)\,! \right] = \lim_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty,$$

e quindi la Serie ha per intervallo di convergenza tutta la retta reale.
Sostituendo poi $-x$ al posto di x nell'espressione trovata per $f(x) = e^x$, otteniamo:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^n}{n\,!},$$

sviluppo in Serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = e^{-x}$.

Esempio 19 : Sviluppiamo in Serie di Mac Laurin la funzione $f(x) = x\,e^{-x}$.

Se eseguiamo il calcolo dei coefficienti, una volta verificato che la funzione è continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, e quindi anche nel punto $x = 0$, avremo:
$f(x) = x\,e^{-x}$, da cui $f(0) = 0$;
$f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x}$, da cui $f'(0) = 1$;
$f''(x) = -2\,e^{-x} + x\,e^{-x}$, da cui $f''(0) = -2$;
$f'''(x) = 3\,e^{-x} - x\,e^{-x}$, da cui $f'''(0) = 3$;
$f^{(4)}(x) = -4\,e^{-x} + x\,e^{-x}$, da cui $f^{(4)}(0) = -4$;
$f^{(5)}(x) = 5\,e^{-x} - x\,e^{-x}$, da cui $f^{(5)}(0) = 5$;
$f^{(6)}(x) = -6\,e^{-x} + x\,e^{-x}$, da cui $f^{(6)}(0) = -6$;
dalle quali, per analogia, possiamo ricavare la legge generale, ovvero:
$f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot k\,e^{-x} + (-1)^k \cdot x\,e^{-x}$, dalla quale otteniamo:
$f^{(k)}(0) = (-1)^{k+1} \cdot k$, e quindi si ha:

$$x\,e^{-x} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1} \cdot k}{k\,!} \cdot x^k + \ldots = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k-1)\,!} \cdot x^k + \ldots .$$

Si può pervenire allo stesso risultato anche in maniera molto più rapida. Essendo

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2\,!} - \frac{x^3}{3\,!} + \ldots. + \frac{(-x)^n}{n\,!} + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!} \cdot x^n ,$$

otteniamo, moltiplicando per x ambo i membri:

$$x\,e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\,!} \cdot x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)\,!} \cdot x^n ,$$ ovvero l'espressione già trovata.

Esempio 20 : Mediante lo sviluppo in Serie di Mac Laurin, determiniamo una primitiva per la funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

Essendo, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \ldots. = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!}$, sostituendo x con $-x^2$ si ha:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n\,!} .$$

Da questa, usando il Teorema d'integrazione per Serie, otteniamo:

$$\int_0^x e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n\,!}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n\,!}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n\,!} ,$$

Serie di potenze con funzione somma $f(x) = e^{-x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Dato che $\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, valendo per la funzione somma di una Serie di potenze proprietà analoghe a quelle della Somma delle Serie numeriche, valgono anche i seguenti sviluppi:

$$\operatorname{senh} x = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n\,!} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!} ,$$ valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e

$$\cosh x = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n\,!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^n}{n\,!} \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)\,!} ,$$ valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Le funzioni circolari $f(x) = \text{sen } x$ **e** $f(x) = \cos x$

Per $f(x) = \text{sen } x$, funzione continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, avremo:
$f(x) = \text{sen } x$, da cui: $f(0) = 0$,
$f'(x) = \cos x$, da cui: $f'(0) = 1$,
$f''(x) = -\text{sen } x$, da cui: $f''(0) = 0$,
$f'''(x) = -\cos x$, da cui: $f'''(0) = -1$,
$f^{(4)}(x) = f(x)$, da cui: $f^{(4)}(0) = 0$,
e proseguendo per analogia, vista la periodicità di tali risultati, avremo anche:
$f^{(5)}(0) = 1, f^{(6)}(0) = 0, f^{(7)}(0) = -1, f^{(8)}(0) = 0$, e così via.
La funzione e le sue derivate sono equilimitate su $\mathbb{R}$, in quanto $|\text{sen } x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, per cui otteniamo:

$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Se calcoliamo il raggio di convergenza di questa Serie di potenze, avremo che:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{(2n+1)!} \cdot (2n+3)! \right] = \lim_{n\to+\infty} [(2n+3)(2n+2)] = +\infty ,$$

e quindi la Serie ha per intervallo di convergenza tutta la retta reale.
Per $f(x) = \cos x$, funzione continua e derivabile infinite volte su tutta la retta reale, avremo:
$f(x) = \cos x$, da cui $f(0) = 1$,
$f'(x) = -\text{sen } x$, da cui $f'(0) = 0$,
$f''(x) = -\cos x$, da cui $f''(0) = -1$,
$f'''(x) = \text{sen } x$, da cui $f'''(0) = 0$,
$f^{(4)}(x) = f(x)$, da cui $f^{(4)}(0) = 1$,
e quindi poi:
$f^{(5)}(0) = 0, f^{(6)}(0) = -1, f^{(7)}(0) = 0, f^{(8)}(0) = 1$, e così via.
La funzione e le sue derivate sono equilimitate su $\mathbb{R}$, in quanto $|\text{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$, per cui potremo scrivere:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} .$$

Se calcoliamo il raggio di convergenza di questa Serie di potenze, avremo:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} \cdot (2n+2)! \right] = \lim_{n\to+\infty} [(2n+2) \cdot (2n+1)] = +\infty ,$$

e quindi la Serie ha per intervallo di convergenza tutta la retta reale.

La serie binomiale

Sappiamo, dal cosiddetto Binomio di Newton, che $(a+b)^n = \sum_{n=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Consideriamo la funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Essendo l'esponente reale, imponiamo $1 + x > 0$, ovvero $x > -1$. Si ha che:
$f'(x) = \alpha (1+x)^{\alpha-1}$, da cui $f'(0) = \alpha$;
$f''(x) = \alpha (\alpha - 1)(1+x)^{\alpha-2}$, da cui $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$;
$f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$, da cui $f'''(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$;
e proseguendo:
$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot ... \cdot (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, da cui
$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdot ... \cdot (\alpha-n+1)$.
La funzione $f(x) = (1+x)^\alpha$ è quindi C^∞ nel punto $x = 0$.

Poniamo, per definizione: $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)}{n\,!}$, che possiamo considerare come l'estensione dei coefficienti binomiali ai numeri reali (solo ad elemento superiore).
Potendosi dimostrare che $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{R}_n(x,0) = 0$, potremo allora scrivere:

$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, avendo posto, per definizione, $\binom{\alpha}{0} = 1$.

Per determinare l'intervallo di convergenza, calcoliamo $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, ovvero:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha\,(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)\,(n+1)\,!}{n\,!\cdot\alpha\,(\alpha-1)\cdot ... \cdot(\alpha-n+1)\,(\alpha-n)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right| = 1\,.$$

Il raggio di convergenza è uguale ad 1, e la Serie converge almeno in $]-1,1[$.
Per quanto concerne gli estremi, si può dimostrare che:
1) se $\alpha \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, la Serie converge assolutamente in $[-1,1]$;
2) se $-1 < \alpha < 0$, la Serie converge in $]-1,1]$;
3) se $\alpha \leq -1$, la Serie converge in $]-1,1[$;
4) se $\alpha \in \mathbb{N}$, si ottiene il Binomio di Newton, e la Serie diviene un polinomio.

ALTRI SVILUPPI IN SERIE
Vediamo infine come ottenere numerosi sviluppi in Serie utilizzando le Serie geometriche e le loro proprietà. Consideriamo la Serie di potenze, di centro il punto $x_0 = 0$: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ (★).
Essa, $\forall\, t$, è una Serie geometrica di ragione t, e quindi converge per $-1 < t < 1$, con funzione somma $S(t) = \dfrac{1}{1-t}$.

Formalmente scriveremo : $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$, $\forall\, t \in\,]-1,1[$.

Utilizzando il Teorema di derivazione per Serie si ha:

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,t^{n-1} = 1 + 2\,t + 3\,t^2 + 4\,t^3 + ... \quad \forall\, t \in\,]-1,1[\,;$$

Ponendo nella (★) : $t = -x$, se $t \in\,]-1,1[$ anche $x \in\,]-1,1[$ e sostituendo avremo:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... \quad \forall\, x \in\,]-1,1[\,.$$

Applicando a quest'ultima il Teorema di derivazione per Serie otteniamo:

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot n\,x^{n-1} = -1 + 2\,x - 3\,x^2 + 4\,x^3 - ... \quad \forall\, x \in\,]-1,1[\,,$$

da cui otteniamo anche, cambiando di segno:

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot n\,x^{n-1} \quad \forall\, x \in\,]-1,1[\,.$$

Applicando invece sulla stessa Serie il Teorema di integrazione per Serie si ha:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \log|1+x| = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1}\,,$$

sviluppo in Serie di Mac Laurin della funzione $f(x) = \log|1+x|$.

Per quanto detto in precedenza, questo sviluppo è valido $\forall\, x \in \,]-1, 1[$, ma se esaminiamo la Serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\, x^{n+1}$ negli estremi dell'intervallo, avremo che per $x = -1$ essa diverge a $-\infty$, mentre per $x = 1$ essa è convergente, ed applicando il Teorema di Abel si ha:

$$\log 2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,,$$

cioè si ottiene il valore della Somma $(S = \log 2)$ della Serie armonica a segni alterni.
Ponendo nella $(\bigstar)$: $t = x^2$, avremo:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots \quad \forall\, x \in \,]-1, 1[\,.$$

Applicando il Teorema d'integrazione per Serie, avremo poi:

$$\int_0^x \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \log\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,\ \forall\, x \in \,]-1, 1[\,.$$

Ponendo invece nella $(\bigstar)$: $t = -x^2$, otteniamo:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \quad \forall\, x \in \,]-1, 1[\,,$$

dalla quale, applicando il Teorema d'integrazione per Serie otterremo:

$$\int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot x^{2n}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,,$$

Serie convergente, oltre che all'interno dell'intervallo $]-1, 1[$, anche nei punti $x = -1$ e $x = 1$.
Nel punto $x = 1$, sostituendo, per il Teorema di Abel, si ha:

$$\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots.\,, \text{ da cui ricaviamo: } \pi = 4 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\,.$$

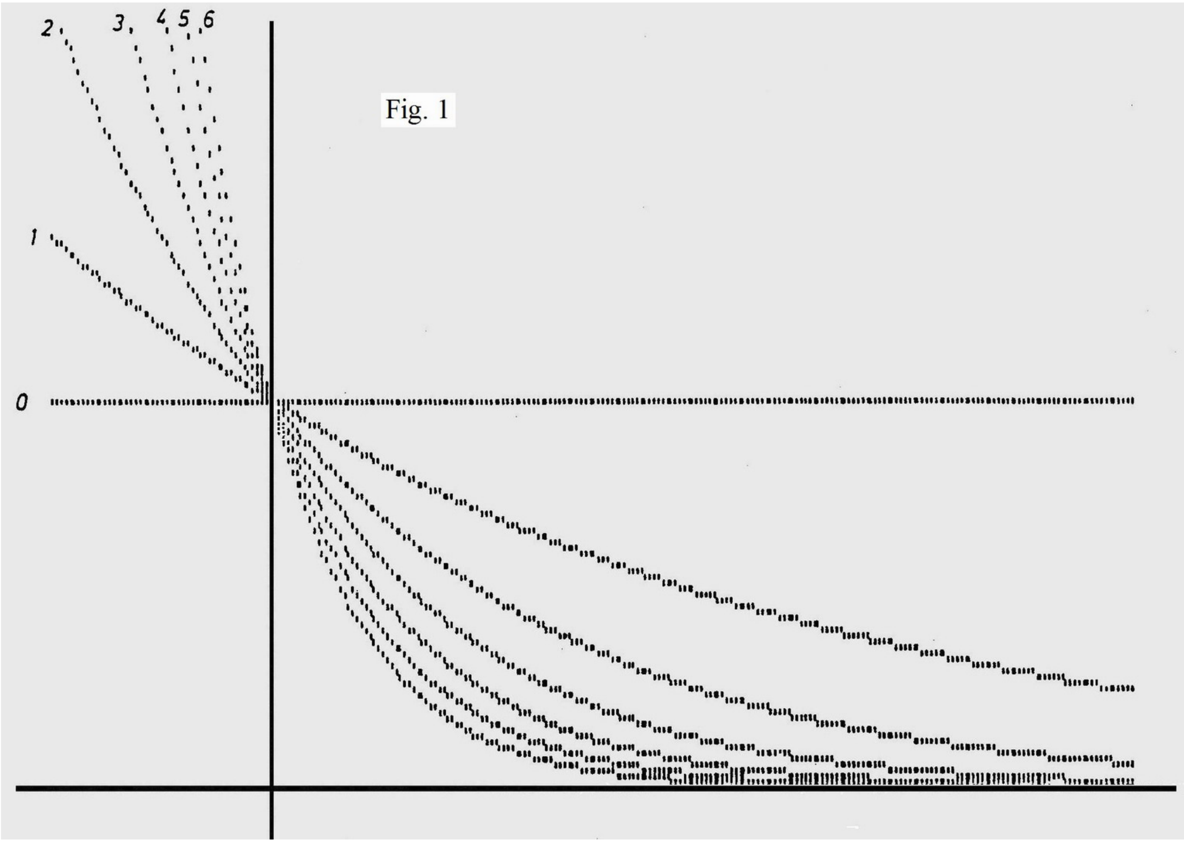

Fig. 1

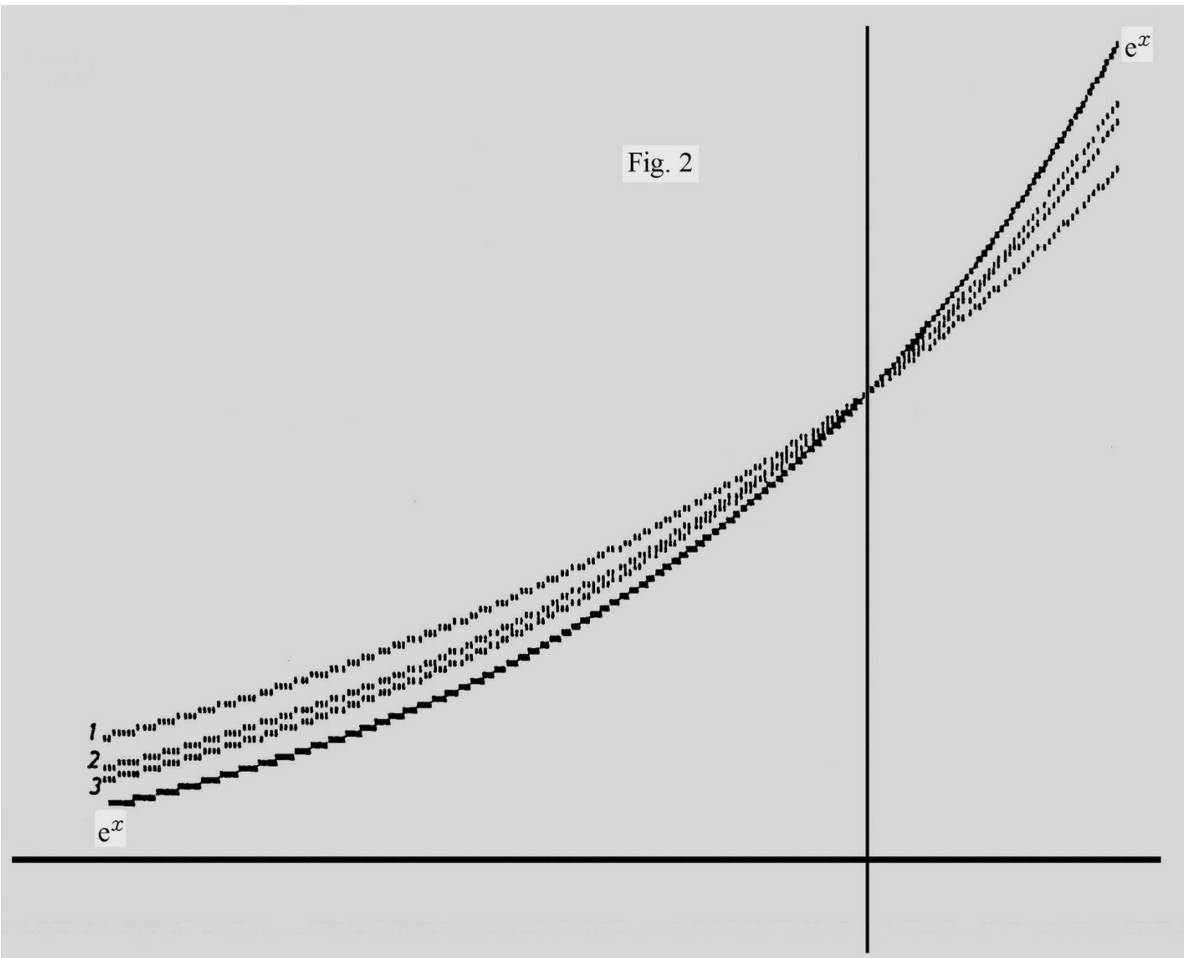

Fig. 2

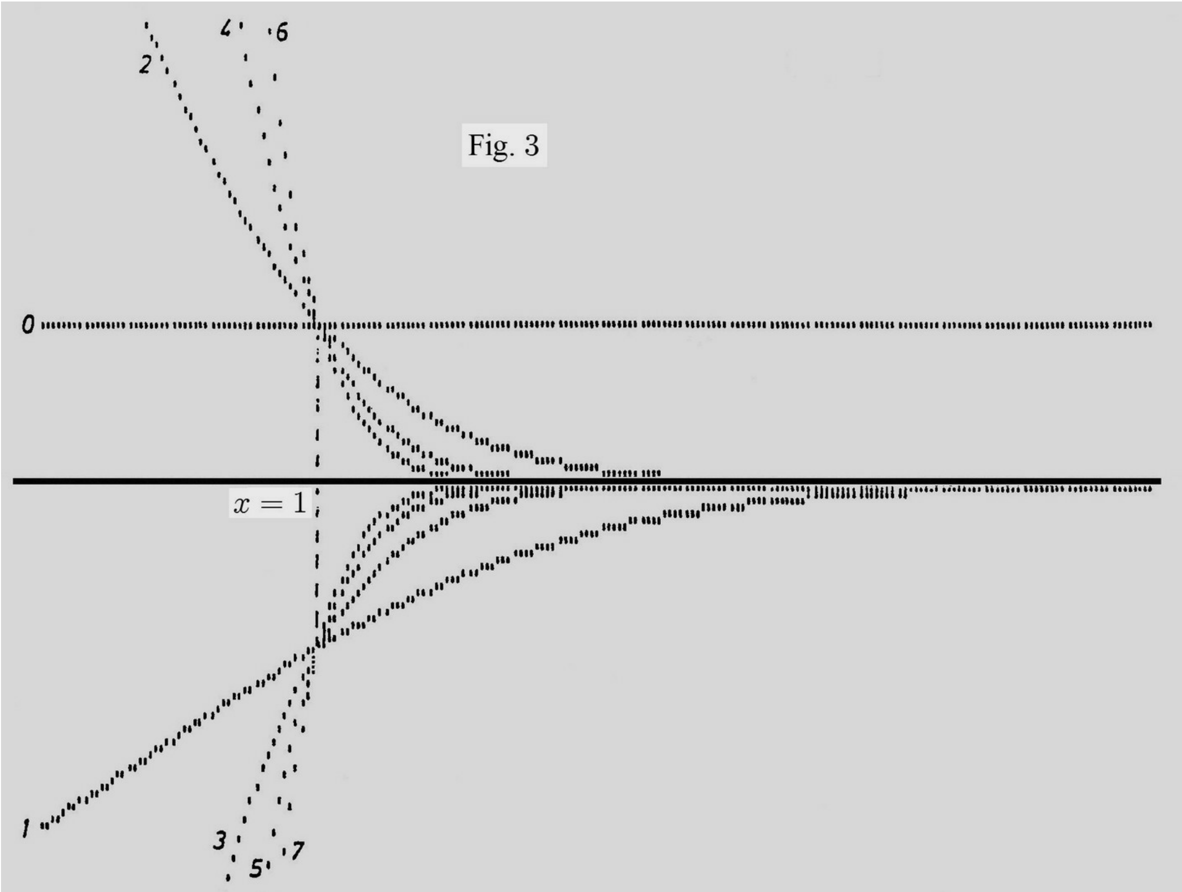

Fig. 3

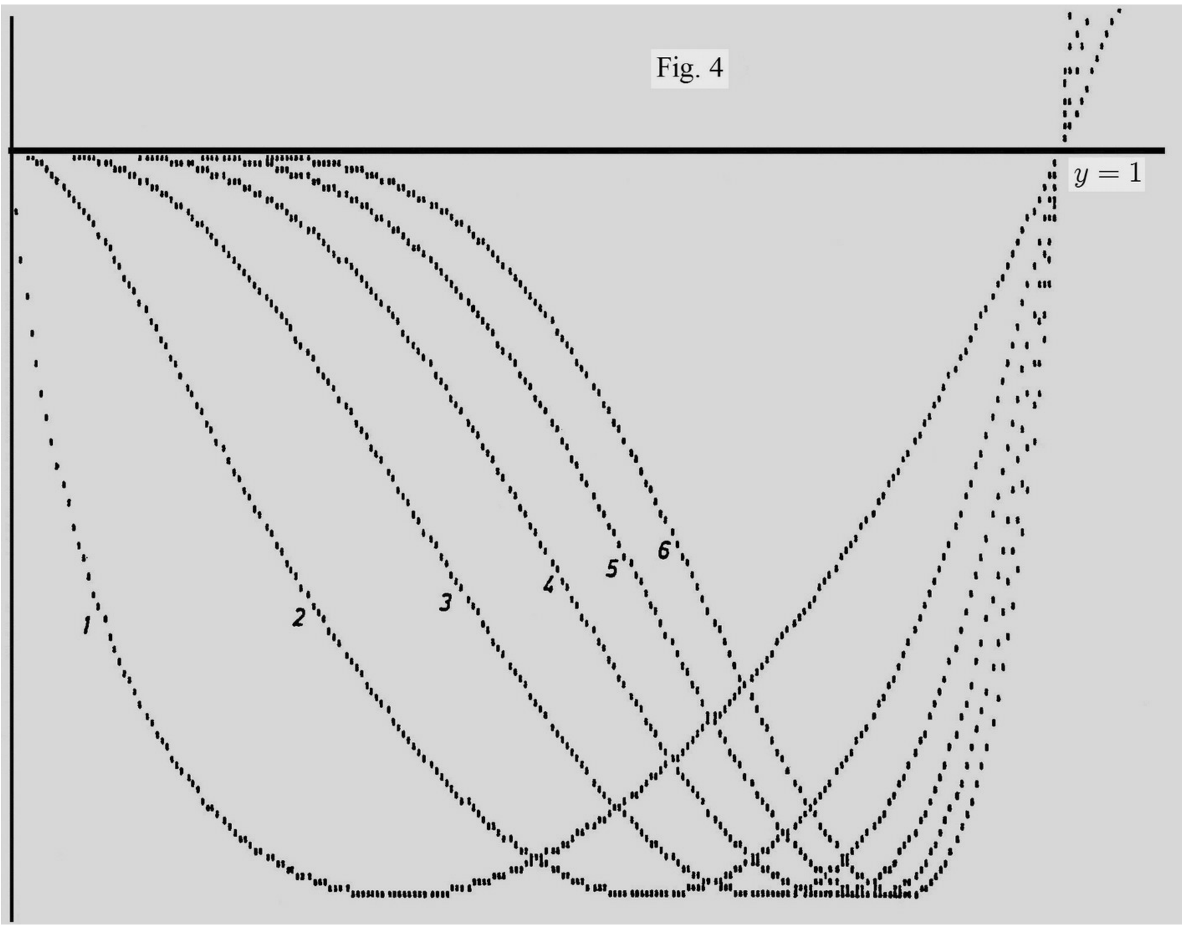

Fig. 4

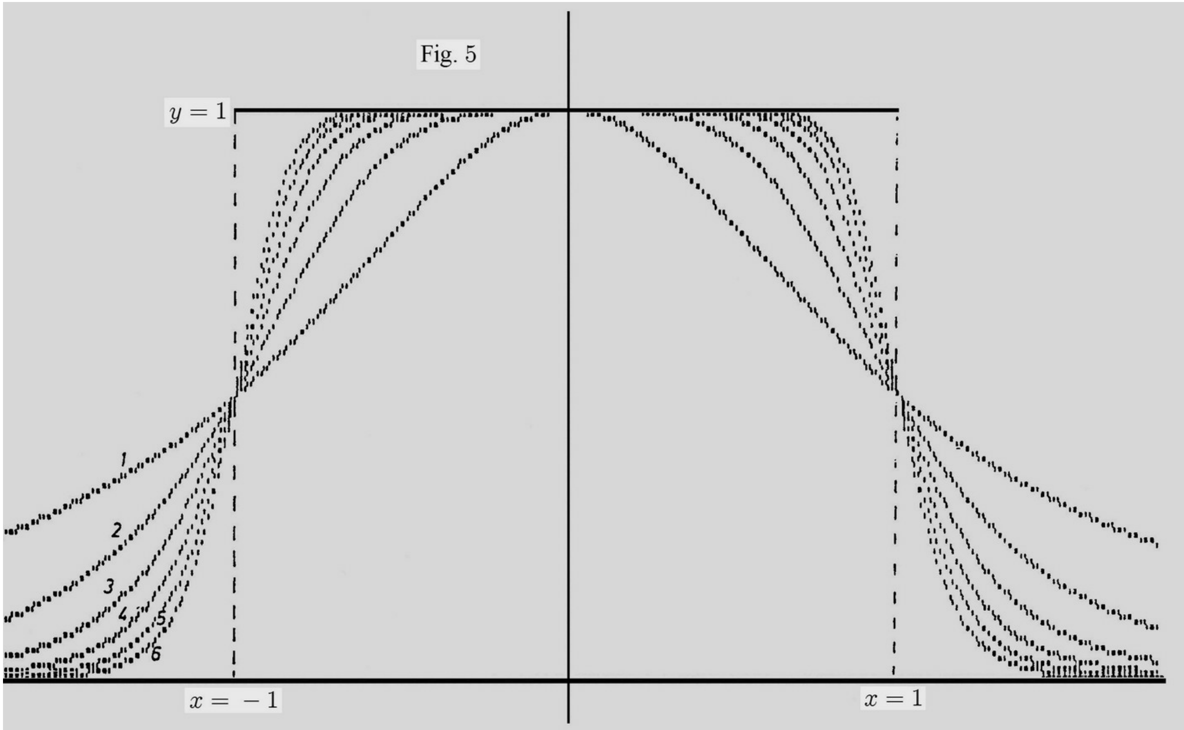
Fig. 5
y = 1
1
2
3
4
5
6
x = −1
x = 1

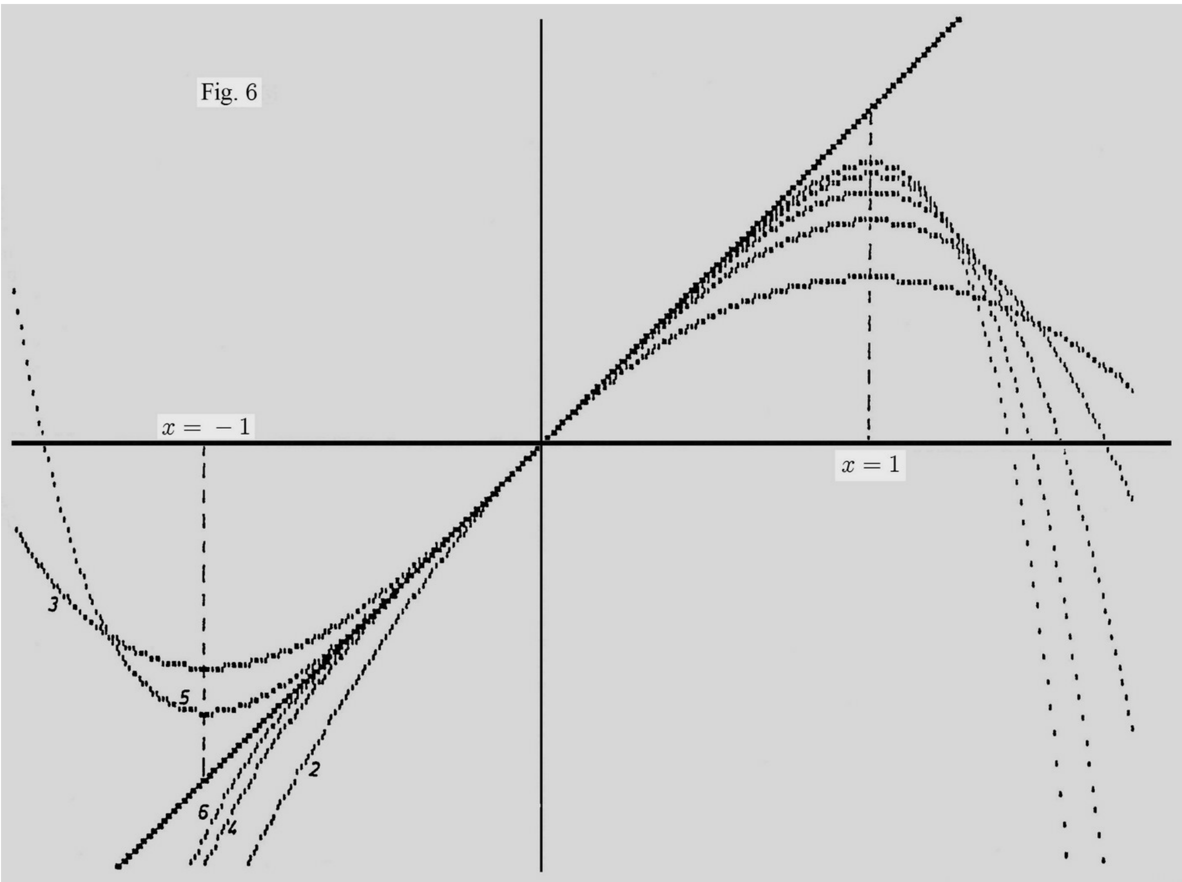
Fig. 6
x = −1
x = 1
3
5
2
6
4

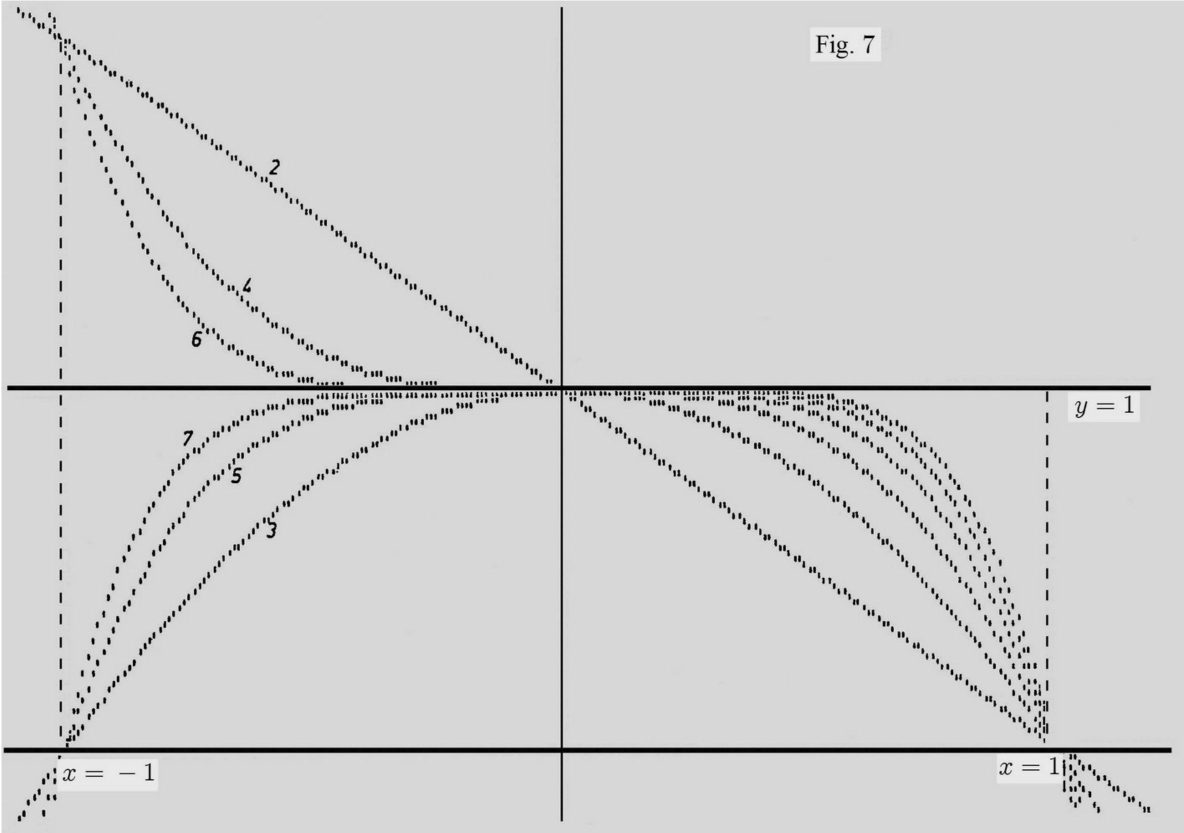
Fig. 7
2
4
6
7
5
3
$y = 1$
$x = -1$
$x = 1$

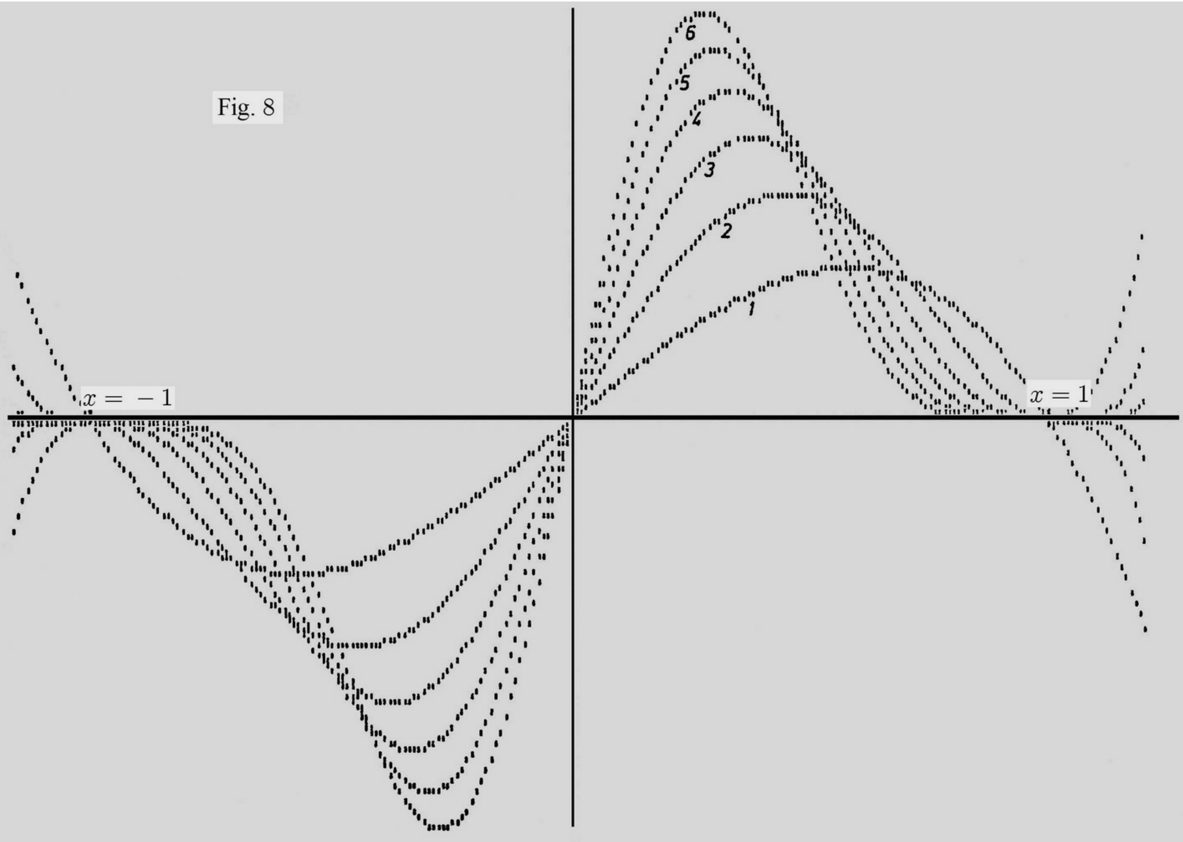
Fig. 8
6
5
4
3
2
1
$x = -1$
$x = 1$

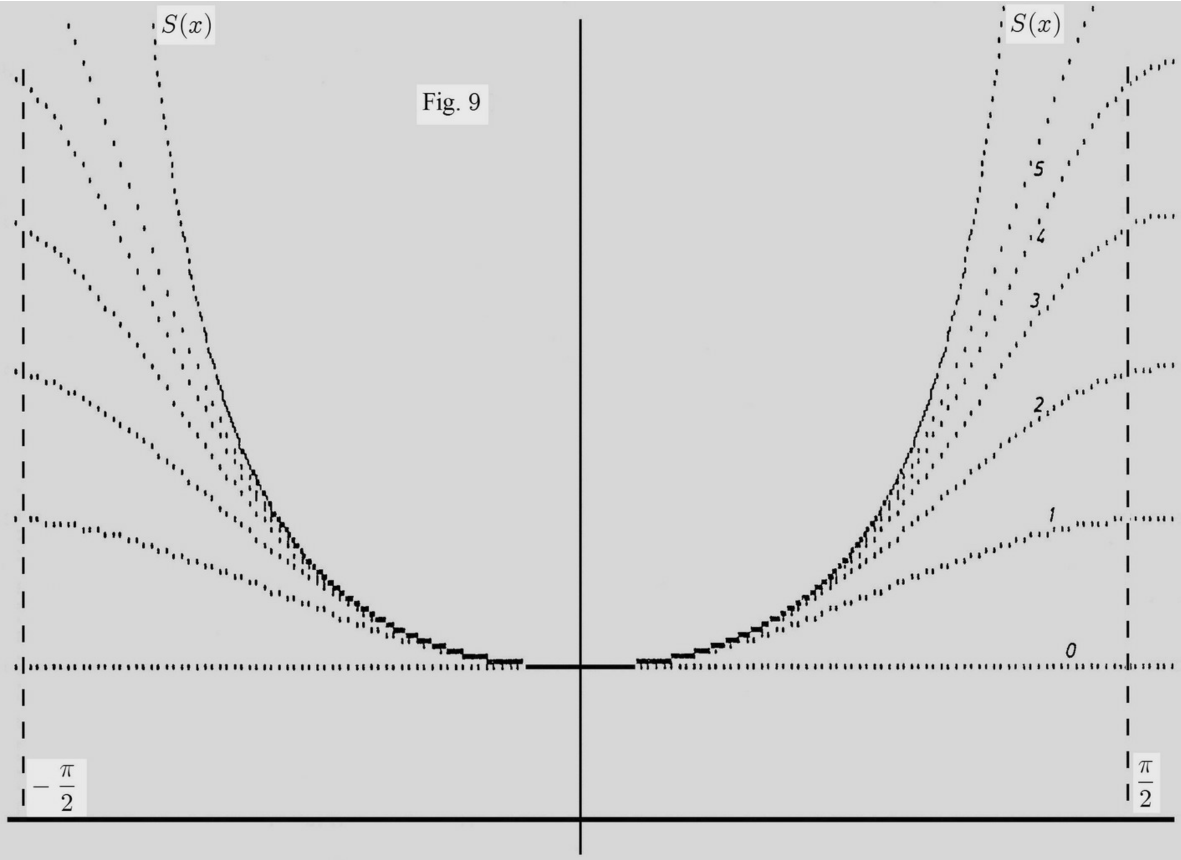

Fig. 9

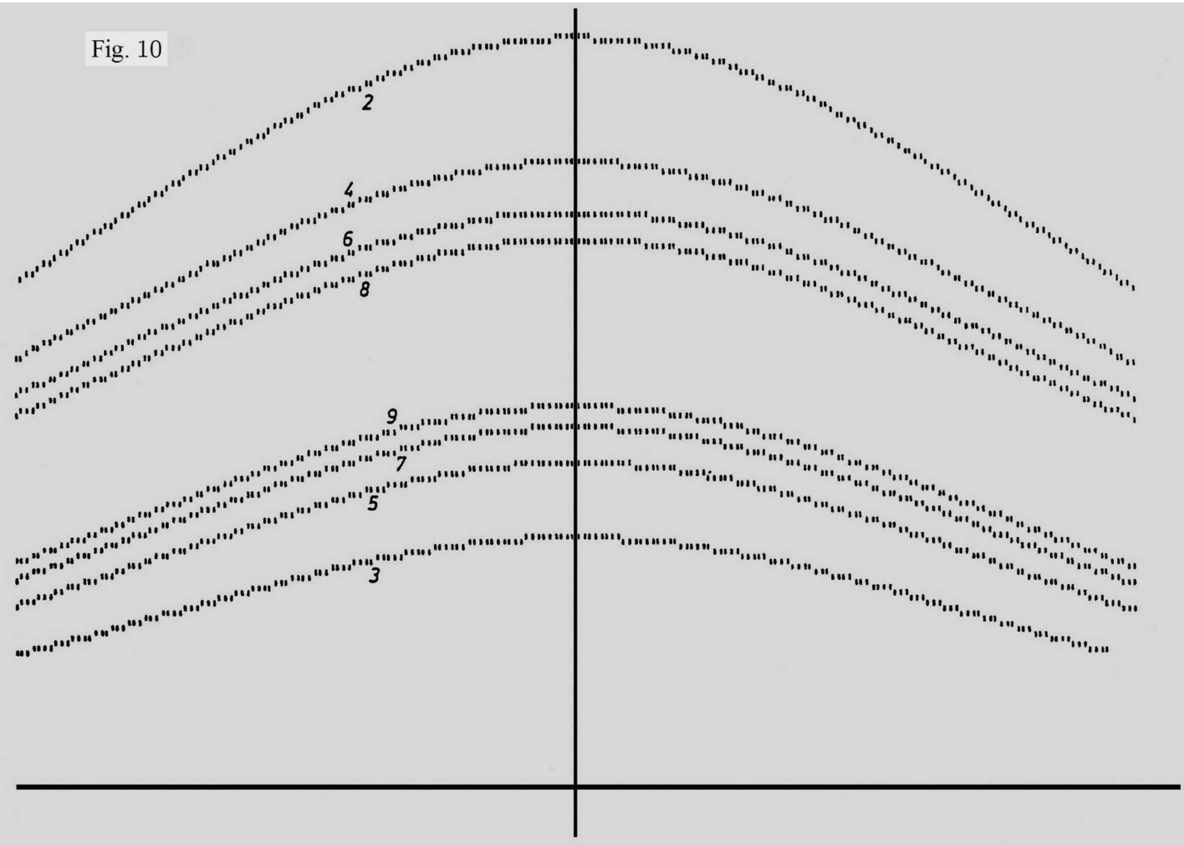

Fig. 10