UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso di
ANALISI MATEMATICA

SUCCESSIONI E SERIE NUMERICHE

AA. 2023/24

SUCCESSIONI

Dicesi Successione a valori reali ogni funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, avente cioè per dominio l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (o un suo opportuno sottoinsieme comunque infinito), e codominio, che indicheremo con $f(\mathbb{N})$ o con $\{a_n\}$, contenuto in $\mathbb{R}$.
Al posto della notazione $f(n)$, per indicare l'immagine di n si usa solitamente scrivere a_n.
Una Successione, avendo dominio numerabile, può essere scritta per esteso come:
$\{a_n\} = a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$.
Il termine a_n viene detto termine generale della Successione, mentre la variabile n prende anche il nome di indice.

Esempio 1 : Vediamo alcuni esempi di successioni :
$a_n = (-1)^n : 1, -1, 1, -1, ...$;
$a_n = \dfrac{n+1}{n} : 2, \dfrac{3}{2}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{5}{4}, ...$;
$a_n = \begin{cases} 1 & \text{per } n \text{ pari} \\ n & \text{per } n \text{ dispari} \end{cases} : 1, 1, 1, 3, 1, 5, 1, 7, ...$;
$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} : 1, \sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - \sqrt{2}, \sqrt{4} - \sqrt{3}, ...$.

CARATTERE DI UNA SUCCESSIONE
Lo studio di una Successione consiste nella determinazione del suo carattere, ovvero nell'analisi del comportamento del termine generale a_n quando n diventa illimitatamente grande. Quindi un numero finito di termini iniziali non avrà rilevanza per la determinazione del carattere. Vedremo che le Successioni, riguardo al loro carattere, si dividono in tre tipi: Successioni convergenti, divergenti e indeterminate.
Diamo anzitutto la
Definizione 1 (di Successione limitata) :
Una Successione si dice limitata se il suo codominio è un insieme limitato.

Introducendo in maniera informale il concetto di limite, diremo che il valore $\mathfrak{L} \in \mathbb{R}$ è il limite della Successione a_n, e si dirà anche che la Successione a_n converge ad $\mathfrak{L}$, se, all'aumentare dell'indice n, i corrispondenti a_n assumono valori sempre più prossimi ad $\mathfrak{L}$.

Esempio 2 : Consideriamo la Successione $a_n = \dfrac{1}{n} : 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...$.
Si ha che $f(\mathbb{N}) \subset]0, 1]$, quindi la Successione è limitata; il suo codominio ha un punto di accumulazione, $\mathfrak{L} = 0$, che non appartiene ad $f(\mathbb{N})$, ed all'aumentare di n il termine generale $a_n = \dfrac{1}{n}$ diventa sempre più piccolo rimanendo pur sempre positivo. Diremo allora che la Successione $a_n = \dfrac{1}{n}$ è convergente a 0.
Esempio 3 : La Successione $a_n = (-1)^n$ è limitata, dato che $f(\mathbb{N}) = \{-1, +1\}$, ma non è convergente, in quanto all'aumentare di n i valori di a_n continuano ad assumere, alternativamente, sia il valore $+1$ che il valore -1.

I concetti sopra esposti vengono rigorosamente formalizzati nella
Definizione 2 (di limite per una Successione convergente) :

Si dice che la Successione a_n converge al valore $\mathfrak{L} \in \mathbb{R}$, e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = \mathfrak{L}$, se scelto un qualunque intorno del punto $\mathfrak{L}$ di ampiezza $\varepsilon > 0\,:\,\mathfrak{I}(\mathfrak{L}, \varepsilon)$, con ε piccolo a piacere, tutti i termini della Successione, tranne al più un numero finito di termini iniziali, appartengono ad $\mathfrak{I}(\mathfrak{L}, \varepsilon)$.

Ovvero, da un certo indice in poi, tutti gli a_n devono essere contenuti in un opportuno intorno, di ampiezza ε piccola quanto si vuole, del punto $\mathfrak{L}$.
Utilizzando la metrica euclidea introdotta sulla retta reale, possiamo riformulare la precedente definizione come:
Definizione 3 (di limite per una Successione convergente) :
Si dice che la Successione a_n è convergente al valore $\mathfrak{L} \in \mathbb{R}$ se $\forall\, \varepsilon > 0$ si può determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$, si abbia $|a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$, ovvero $\mathfrak{L} - \varepsilon < a_n < \mathfrak{L} + \varepsilon$.
Ovvero: $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\; n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$.

Quest'ultima definizione di Successione convergente è la rigorosa espressione matematica del concetto intuitivo di convergenza, ovvero "gli a_n assumono valori sempre più prossimi ad $\mathfrak{L}$ ($|a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$) quando n diventa sempre più grande ($\forall\, n > n(\varepsilon)$)".

Esempio 4 : Consideriamo la Successione $a_n = \dfrac{n+1}{n}$. All'aumentare di n, il quoziente dei due numeri $n+1$ ed n assume valori sempre più prossimi ad 1, e, $\forall\, n$, risulta $a_n > 1$.
Scelto un qualunque $\varepsilon > 0$, imponiamo che sia $|a_n - 1| = \left|\dfrac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$, ovvero:
$1 - \varepsilon < 1 + \dfrac{1}{n} < 1 + \varepsilon$, e cioè $-\varepsilon < \dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
La disequazione di sinistra è sempre soddisfatta, mentre quella di destra è vera per $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, per cui, posto $n(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, ([...] è la parte intera), è verificato che 1 è il limite della Successione in quanto, $\forall\, n > n(\varepsilon)$, si ha che a_n appartiene alla parte destra dell'intorno $\mathfrak{I}(1, \varepsilon)$.

Esempio 5 : Determiniamo il carattere della Successione $a_n = 2^{1-3n} + 1$, verificando, mediante la definizione di limite, il risultato.
All'aumentare di n l'esponente diventa sempre più grande e negativo, per cui l'esponenziale in base 2 tende a zero e quindi a_n tende a 1. Verifichiamo che la Successione è convergente a 1 imponendo che sia $|a_n - 1| = \left|\left(2^{1-3n} + 1\right) - 1\right| < \varepsilon$.
Da questa otteniamo $\left|2^{1-3n}\right| < \varepsilon$, ovvero $2^{1-3n} < \varepsilon$, in quanto un'esponenziale è sempre positiva, poi $1 - 3n < \log_2 \varepsilon$, e quindi $n > \dfrac{1 - \log_2 \varepsilon}{3}$.
Posto $n(\varepsilon) = \left[\dfrac{1 - \log_2 \varepsilon}{3}\right] + 1$, $\forall\, n > n(\varepsilon)$ sarà verificata la nostra disequazione e notando che se $\varepsilon \to 0$, $n(\varepsilon) \to +\infty$, è completata la verifica del limite.

Esempio 6 : Consideriamo la Successione $a_n = 2^{1+\frac{1}{n}}$. Quando n diventa sempre più grande, il valore dell'esponente tende ad 1, per cui la Successione è convergente ed il limite vale 2.
Verifichiamolo, imponendo $\left|2^{1+\frac{1}{n}} - 2\right| < \varepsilon$.

Si ha che $\left|2^{1+\frac{1}{n}}-2\right|=\left|2\left(2^{\frac{1}{n}}-1\right)\right|<\varepsilon$ per $2^{\frac{1}{n}}<\frac{\varepsilon}{2}+1$, in quanto il termine dentro il valore assoluto è sempre positivo, per cui dovrà essere $\frac{1}{n}<\log_2\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)$, ovvero $n>\frac{1}{\log_2\left(\frac{\varepsilon}{2}+1\right)}$, quantità che diventa sempre più grande quando ε tende a zero.
Il limite è allora verificato.

Consideriamo poi Successioni con codominio non limitato. Affermare che il codominio $f(\mathbb{N})$ della Successione è non limitato significa che per quanto grande si scelga un numero positivo ε, al di fuori dell'intervallo $[-\varepsilon,\varepsilon]$ si trovano sempre elementi della Successione a_n.
Se in una Successione divergente i termini negativi sono in numero finito, allora si scriverà $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$, e si dirà che la Successione a_n diverge positivamente, mentre si scriverà $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$ se sono in numero finito i termini positivi, e si dirà che la Successione a_n diverge negativamente.

In forma metrica, avremo le seguenti:
Definizione 4 (di Successione divergente positivamente) :
Si dice che la Successione a_n diverge positivamente (a $+\infty$) se per ogni ε è possibile determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n>n(\varepsilon)$, si abbia $a_n>\varepsilon$.
Ovvero : $\forall\,\varepsilon\,\exists\, n(\varepsilon) : n>n(\varepsilon)\Rightarrow a_n>\varepsilon$.

Definizione 5 (di Successione divergente negativamente) :
Si dice che la Successione a_n diverge negativamente (a $-\infty$) se per ogni ε è possibile determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n>n(\varepsilon)$, si abbia $a_n<\varepsilon$.
Ovvero : $\forall\,\varepsilon\;\exists\, n(\varepsilon) : n>n(\varepsilon)\Rightarrow a_n<\varepsilon$.

Quando sia i termini positivi che quelli negativi sono in numero infinito, e tendono, presi in valore assoluto, a divenire sempre più grandi, si dirà che la Successione diverge oscillando, e questo caso può essere espresso in forma metrica nel modo seguente:
Definizione 6 (di Successione divergente oscillante) :
Si dice che la Successione a_n, in cui sia i termini positivi che quelli negativi sono in numero infinito, diverge oscillando (ad ∞) se per ogni $\varepsilon>0$ grande a piacere è possibile determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n>n(\varepsilon)$ si abbia $|a_n|>\varepsilon$.
Ovvero : $\forall\,\varepsilon>0\,\exists\, n(\varepsilon) : n>n(\varepsilon)\Rightarrow |a_n|>\varepsilon$.

Esempio 7 : La Successione $a_n=\log(1+n)$ è divergente a $+\infty$.
Infatti, scelto $\varepsilon>0$, si ha che $a_n>\varepsilon$ se $\log(1+n)>\varepsilon$, ovvero per $n>e^{\varepsilon}-1$; posto $n(\varepsilon)=[e^{\varepsilon}-1]+1=[e^{\varepsilon}]$, se $n>n(\varepsilon)$, gli a_n cadono tutti a destra di ε, per quanto grande sia ε; il codominio è illimitato superiormente, e scriveremo che $\lim_{n\to+\infty}\log(1+n)=+\infty$.

Esempio 8 : Consideriamo la Successione $a_n=(-1)^n\cdot\log(1+n)$.
Dato che $|a_n|=\log(1+n)$, e visto che i suoi termini sono alternativamente positivi e negativi, la Successione diverge oscillando, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\cdot\log(1+n)=\infty$.

Esempio 9 : Determiniamo e verifichiamo il carattere della Successione $a_n=\frac{1-n^2}{2+n}$.

Si ha che $a_n = \dfrac{1-n^2}{2+n} = \dfrac{4-n^2-3}{2+n} = \dfrac{4-n^2}{2+n} - \dfrac{3}{2+n} = 2-n-\dfrac{3}{2+n}$.
Quando n diventa sempre più grande, $2-n$ diventa sempre più grande e negativo, mentre $\dfrac{3}{2+n}$ è sempre più prossimo a zero. Quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-n^2}{2+n} = -\infty$. Verifichiamolo.
Scelto un valore ε, imponiamo che sia: $\dfrac{1-n^2}{2+n} < \varepsilon$, che per la precedente scomposizione equivale a: $2-n-\dfrac{3}{2+n} < \varepsilon$, ovvero: $n-2+\dfrac{3}{2+n} > -\varepsilon$.
Essendo $n-2+\dfrac{3}{2+n} > n-2$ $\left(\dfrac{3}{2+n} > 0\right)$, basterà prendere $n > 2-\varepsilon$, affinchè sia verificata la $\dfrac{1-n^2}{2+n} < \varepsilon$, ovvero il limite trovato.

Vale infine la seguente:
Definizione 7 (di Successione indeterminata) :
Una Successione che non sia ne divergente ne convergente si dice indeterminata.

Esempio 10 : La Successione $a_n = \operatorname{sen}\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$ ci fornisce un esempio di Successione indeterminata. Infatti, se n è pari, si ha $a_n = 0$; se n è dispari e tale che $n = 4k+1$, con $k \in \mathbb{N}$, allora $a_n = +1$, mentre per gli altri valori dispari di n abbiamo $a_n = -1$.

Le varie definizioni di Successione convergente e divergente possono essere unificate considerando, nella cosiddetta retta reale compattificata $\widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$, $+\infty$ e $-\infty$ come punti di accumulazione, rispettivamente a destra e a sinistra della retta reale, di ogni insieme illimitato.
Definiamo allora intorno di $+\infty$ l'intervallo $]\varepsilon, +\infty[$, ed analogamente intorno di $-\infty$ l'intervallo $]-\infty, \varepsilon[$, con ε numero scelto a piacere.
Con questa estensione sia le Successioni convergenti che le Successioni divergenti positivamente o negativamente si diranno regolari ed avremo la:
Definizione 8 (di limite generale per una Successione) : Si dice che la Successione a_n converge al limite $\mathfrak{L}$ (finito o infinito) se per ogni intorno di $\mathfrak{L}$ esiste un indice $\overline{n}$ tale che, $\forall n > \overline{n}$, a_n appartiene a detto intorno.
Non sono regolari le Successioni indeterminate e quelle che divergono oscillando. Principalmente per queste due categorie di Successioni, per motivi che vedremo in seguito, nasce l'esigenza di una nuova definizione che colmi, per così dire, la lacuna della non esistenza del limite.

MASSIMO E MINIMO LIMITE

Considerata una Successione di termine generale a_n, introduciamo anzitutto il concetto di maggiorante e/o minorante definitivo mediante le
Definizione 9 (di maggiorante e/o minorante di una Successione) :
Un numero M è detto maggiorante (minorante) di una Successione a_n se, $\forall n$, risulta $a_n \leq \mathrm{M}$ $(a_n \geq \mathrm{M})$.
Definizione 10 (di maggiorante e/o minorante definitivo) :
Un numero M è detto maggiorante (minorante) definitivo per la Successione a_n se esiste un indice n_0 tale che $a_n \leq \mathrm{M}$, $\forall n > n_0$ $(a_n \geq \mathrm{M}, \forall n > n_0)$.

Mentre i maggioranti ed i minoranti sono tutti quei valori rispettivamente maggiori e minori di ogni elemento della Successione, maggioranti e minoranti definitivi sono quei valori che, da un certo indice n_0 in poi, sono, rispettivamente, maggiori e minori dei soli elementi della Successione corrispondenti ad indici $n \geq n_0$.
Abbiamo allora la
Definizione 11 : (di massimo e/o minimo limite di una Successione):
Si dice massimo limite di una Successione a_n, e si indica con $\operatorname*{Max\,lim}_{n\to+\infty} a_n$, l'estremo inferiore dell'insieme dei maggioranti definitivi.
Si dice minimo limite di una Successione a_n, e si indica con $\operatorname*{Min\,lim}_{n\to+\infty} a_n$, l'estremo superiore dell'insieme dei minoranti definitivi.

Se una Successione a_n è illimitata superiormente, si porrà $\operatorname*{Max\,lim}_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, mentre per una Successione illimitata inferiormente porremo $\operatorname*{Min\,lim}_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Si può dimostrare che valgono i seguenti:
Teorema 1 : Se la Successione a_n è limitata superiormente, allora:
$\operatorname*{Max\,lim}_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} \{a_k\}$;
se la Successione a_n è limitata inferiormente, allora:
$\operatorname*{Min\,lim}_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} \{a_k\}$.

Teorema 2 : Il valore $\mathfrak{L}_1 \in \mathbb{R}$ è il massimo limite della Successione a_n se e solo se:
1) $\forall\,\varepsilon > 0$ esiste un indice $n(\varepsilon)$ tale che $\forall\, n > n(\varepsilon)$ si abbia: $a_n < \mathfrak{L}_1 + \varepsilon$, e
2) $\forall\,\varepsilon > 0$ esistono infiniti n per cui: $\mathfrak{L}_1 - \varepsilon < a_n$.
Il valore $\mathfrak{L}_2 \in \mathbb{R}$ è il minimo limite della Successione a_n se e solo se:
1) $\forall\,\varepsilon > 0$ esiste un indice $n(\varepsilon)$ tale che $\forall\, n > n(\varepsilon)$ si abbia: $\mathfrak{L}_2 - \varepsilon < a_n$, e
2) $\forall\,\varepsilon > 0$ esistono infiniti n per cui: $a_n < \mathfrak{L}_2 + \varepsilon$.
Si noti come non si richieda che le condizioni 2) siano soddisfatte $\forall\, n > n(\varepsilon)$, ma solo per infiniti valori dell'indice.
La caratteristica saliente del massimo e del minimo limite è quella di esistere per qualunque Successione, ed i concetti di massimo e minimo limite sono utili principalmente per le Successioni non regolari, in quanto vale il
Teorema 3 : Si ha che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}$ se e solo se $\operatorname*{Max\,lim}_{n\to+\infty} a_n = \operatorname*{Min\,lim}_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}$.

Esempio 11 : Determiniamo il carattere della Successione $a_n = n \operatorname{sen}^2 n$.
All'aumentare di n abbiamo il prodotto tra due quantità positive di cui la prima diventa sempre più grande, mentre la seconda assume periodicamente valori compresi tra 0 e 1.
Verifichiamo che $\operatorname*{Max\,lim}_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}^2 n = +\infty$ e che $\operatorname*{Min\,lim}_{n\to+\infty} n \operatorname{sen}^2 n = 0$.
La prima affermazione si verifica dimostrando che la Successione è illimitata superiormente.
Infatti, se $\frac{(1+8k)\,\pi}{4} < n < \frac{(3+8k)\,\pi}{4}$, con $k \in \mathbb{N}$, si ha che $\operatorname{sen}^2 n > \frac{1}{2}$, per cui sarà:
$n \operatorname{sen}^2 n > \frac{n}{2} > \varepsilon$ per $n > 2\,\varepsilon$, con ε grande a piacere.

Per verificare la seconda, notiamo che $n\,\mathrm{sen}^2 n \geq 0$, $\forall n$, e che $n\,\mathrm{sen}^2 n < \varepsilon$ implica $\mathrm{sen}^2 n < \frac{\varepsilon}{n}$, ed esistono infiniti valori per cui questa è soddisfatta, come si può vedere da un confronto grafico tra $\frac{\varepsilon}{n}$ e $\mathrm{sen}^2 n$.

TEOREMI SUI LIMITI

Enunciamo ora vari Teoremi utili a stabilire la convergenza di una Successione o le proprietà di una Successione convergente.

Teorema 4 : Ogni Successione convergente è limitata.

Dimostrazione : Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L} \in \mathbb{R}$, allora $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$.

Consideriamo la seguente somma $S = |a_0| + |a_1| + ... + |a_{n(\varepsilon)}| + |\mathfrak{L}| + \varepsilon$. Qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ avremo che $|a_n| < S$. Infatti, se $n \leq n(\varepsilon)$, $|a_n|$ è un addendo di S, e quindi ne è minore, se invece $n > n(\varepsilon)$, da $|a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$ segue $a_n < \mathfrak{L} + \varepsilon \leq |\mathfrak{L}| + \varepsilon$, da cui la tesi.●

Teorema 5 (di unicità del limite) : Il limite di una Successione, se esiste, è unico.

Dimostrazione : Supponendo per assurdo che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_1$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_2$, con $\mathfrak{L}_1 \neq \mathfrak{L}_2$, scegliamo $\varepsilon < \frac{|\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2|}{2}$. Gli intorni $\mathfrak{J}(\mathfrak{L}_1, \varepsilon)$ e $\mathfrak{J}(\mathfrak{L}_2, \varepsilon)$, avendo un'ampiezza minore della distanza dei loro centri, non hanno punti in comune. Se fossero veri ambedue i limiti, per la definizione di limite, da un certo $n_1(\varepsilon)$ in poi tutti gli a_n dovrebbero appartenere a $\mathfrak{J}(\mathfrak{L}_1, \varepsilon)$ e da un certo $n_2(\varepsilon)$ in poi, analogamente, a $\mathfrak{J}(\mathfrak{L}_2, \varepsilon)$.

Preso il più grande dei due indici, $\overline{n}(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, $\forall\, n > \overline{n}(\varepsilon)$ si dovrebbe avere che $a_n \in \mathfrak{J}(\mathfrak{L}_1, \varepsilon)$ e che $a_n \in \mathfrak{J}(\mathfrak{L}_2, \varepsilon)$ e questo è assurdo, da cui la tesi.

Supponendo poi sempre per assurdo che sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, dovrebbe risultare, per il primo limite, $a_n < \mathfrak{L} + \varepsilon_1$ e per il secondo $a_n > \varepsilon_2$, palesemente assurda se $\varepsilon_2 > \mathfrak{L} + \varepsilon_1$. Dimostrazione analoga nell'ipotesi di $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$●

Teorema 6 (della permanenza del segno) : Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}$, con $\mathfrak{L} > 0$, allora esiste un indice $\overline{n}$ tale che, $\forall\, n > \overline{n}$, risulta $a_n > 0$.

Ovvero, se la Successione converge ad un valore positivo, da un certo indice $\overline{n}$ in poi i suoi elementi hanno tutti lo stesso segno del limite, ovvero sono positivi.

Dimostrazione : Scelto $\varepsilon = \frac{\mathfrak{L}}{2}$, per la definizione di limite esiste $\overline{n} = n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$, si ha $|a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$, da cui $a_n > \mathfrak{L} - \varepsilon = \frac{\mathfrak{L}}{2} > 0$, cioè la tesi.●

Il Terema della permanenza del segno permette quindi di dedurre, dal segno del limite, il segno degli elementi della Successione. Vediamo in quale forma possa valere l'implicazione inversa, ovvero dedurre dal segno degli elementi della Successione il segno del limite. Vale il seguente:

Teorema 7 : Sia data una Successione a_n e sia, $\forall\, n > n_0$, $a_n > 0$. Allora, se $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste, si ha che $\lim_{n\to+\infty} a_n \geq 0$.

Dimostrazione : Per assurdo, sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}$, con $\mathfrak{L} < 0$. Scelto $\varepsilon = \dfrac{|\mathfrak{L}|}{2}$, per la definizione di limite, dovrebbe esistere $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$, si abbia $|a_n - \mathfrak{L}| < \varepsilon$, che però equivale a $\mathfrak{L} - \varepsilon < a_n < \mathfrak{L} + \varepsilon = \dfrac{\mathfrak{L}}{2} < 0$, assurda in quanto $a_n > 0$.●
Si può quindi concludere, ad esempio, che una Successione a termini positivi non può avere un limite negativo.

Teorema 8 (del confronto) : Siano a_n, b_n e c_n tre Successioni tali che, almeno da un certo indice n_0 in poi, risulti $a_n \le b_n \le c_n$.
Allora, se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L} = \lim_{n\to+\infty} c_n$, sarà anche $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathfrak{L}$.
Inoltre, se $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} c_n = +\infty$ mentre se $\lim_{n\to+\infty} b_n = -\infty$ allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.
Dimostrazione : Scelto $\varepsilon > 0$, da un certo indice $n(\varepsilon)$ in poi tutti gli a_n ed i c_n apparterranno ad uno stesso intorno $\mathfrak{J}(\mathfrak{L}, \varepsilon)$ e, dato che $a_n \le b_n \le c_n$, a questo intorno non potranno che appartenere anche tutti i b_n, da cui la prima tesi.
Nelle altre due ipotesi abbiamo che la Successione b_n è illimitata, nel primo caso superiormente e nel secondo inferiormente, per cui si ha, rispettivamente, che c_n è superiormente illimitata o che a_n è inferiormente illimitata, da cui la tesi.●

OPERAZIONI SULLE SUCCESSIONI
Date due Successioni di termini generali a_n e b_n, si definiscono la somma, la differenza, la combinazione lineare, il prodotto, il reciproco, il quoziente ed il valore assoluto delle Successioni a_n e b_n come nuove Successioni aventi per termine generale, rispettivamente, la somma, la differenza, la combinazione lineare, il prodotto, il reciproco, il quoziente ed il valore assoluto dei termini generali a_n e b_n.
Vediamo ora un Teorema d'importanza fondamentale, in quanto ci esprime la relazione che intercorre tra il carattere di queste nuove Successioni e quello delle Successioni a_n e b_n.
Teorema 9 : Siano date due Successioni convergenti a_n e b_n, tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathfrak{L}_2$. Allora si ha che:
1) $\lim_{n\to+\infty} [a_n + b_n] = \mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2$; $\lim_{n\to+\infty} [a_n - b_n] = \mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2$;
2) se $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to+\infty} [k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot b_n] = k_1 \cdot \mathfrak{L}_1 + k_2 \cdot \mathfrak{L}_2$;
3) $\lim_{n\to+\infty} [a_n \cdot b_n] = \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_2$;
4) se $\mathfrak{L}_1 \ne 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{\mathfrak{L}_1}$;
5) se $\mathfrak{L}_2 \ne 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\mathfrak{L}_1}{\mathfrak{L}_2}$;
6) $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\mathfrak{L}_1|$.
Dimostrazione : Vediamo le dimostrazioni relative alla somma e alla differenza.
Scelto $\varepsilon > 0$, dato che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_1$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathfrak{L}_2$, esisteranno due indici, n_1 e n_2 per i quali si ha: $\forall\, n > n_1 \;:\; |a_n - \mathfrak{L}_1| < \varepsilon$ e $\forall\, n > n_2 \;:\; |b_n - \mathfrak{L}_2| < \varepsilon$. Preso $\overline{n} = \max\{n_1, n_2\}$, $\forall\, n > \overline{n}$ sarà $|a_n + b_n - (\mathfrak{L}_1 + \mathfrak{L}_2)| \le |a_n - \mathfrak{L}_1| + |b_n - \mathfrak{L}_2| < 2\,\varepsilon$, ovvero la tesi per la somma, e sarà anche:
$|a_n - b_n - (\mathfrak{L}_1 - \mathfrak{L}_2)| = |(a_n - \mathfrak{L}_1) - (b_n - \mathfrak{L}_2)| \le |a_n - \mathfrak{L}_1| + |b_n - \mathfrak{L}_2| < 2\,\varepsilon$, e quindi la tesi per la differenza.

Nel caso del prodotto, dato che la Successione a_n è convergente, per il Teorema 4 essa è limitata, quindi, $\forall\, n,\ |a_n| < \mathrm{M}$; scelto $\varepsilon > 0$, determiniamo $\overline{n}$ come nel caso della somma; $\forall\, n > \overline{n}$ avremo che :
$|a_n\, b_n - \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{L}_2| = |a_n\, b_n - a_n\, \mathfrak{L}_2 + a_n\, \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{L}_2| \leq$
$\leq |a_n\, b_n - a_n\, \mathfrak{L}_2| + |a_n\, \mathfrak{L}_2 - \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{L}_2| = |a_n| \cdot |b_n - \mathfrak{L}_2| + |\mathfrak{L}_2| \cdot |a_n - \mathfrak{L}_1| < \mathrm{M}\,\varepsilon + |\mathfrak{L}_2|\,\varepsilon$,
ovvero $|a_n\, b_n - \mathfrak{L}_1\, \mathfrak{L}_2| < \varepsilon\,(\mathrm{M} + |\mathfrak{L}_2|)$, da cui la tesi.
Consideriamo ora il punto $4)$, cioè il limite del reciproco. Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_1$, con $\mathfrak{L}_1 \neq 0$, per il Teorema della permanenza del segno si può determinare un indice $\overline{n}$ tale che, a seconda del segno di $\mathfrak{L}_1$, $\forall\, n > \overline{n}$ si abbia $a_n < 0$ oppure $a_n > 0$, ma in ogni caso certamente $|a_n| > 0$, per cui si potrà determinare un valore $\delta > 0$ tale che $|a_n| > \delta > 0$. Avremo quindi che:
$\left|\dfrac{1}{a_n} - \dfrac{1}{\mathfrak{L}_1}\right| = \left|\dfrac{\mathfrak{L}_1 - a_n}{\mathfrak{L}_1 \cdot a_n}\right| < \varepsilon\,\dfrac{1}{|\mathfrak{L}_1|} \cdot \dfrac{1}{|a_n|} < \varepsilon\,\dfrac{1}{|\mathfrak{L}_1|} \cdot \dfrac{1}{\delta}$, ovvero la tesi per il reciproco.
Per quanto riguarda il punto $5)$, ovvero il limite del quoziente, basta considerare il rapporto tra a_n e b_n come il prodotto tra a_n ed il reciproco di b_n, e quindi, da 3) e 4), segue la tesi.
Infine, per il punto $6)$, avremo $||a_n| - |\mathfrak{L}_1|| \leq |a_n - \mathfrak{L}_1| < \varepsilon$, cioè la tesi, ed è bene far notare come non sussista il viceversa, ovvero se $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = |\mathfrak{L}|$ può accadere che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ valga $\mathfrak{L}$ oppure $-\mathfrak{L}$ oppure non esista.●

Questo Teorema sancisce, sotto condizioni molto generali, la scambiabilità della operazione di passaggio al limite con le quattro operazioni dell'aritmetica e con il valore assoluto.
Si possono sintetizzare i risultati trovati dicendo che il limite di una somma è dato dalla somma dei limiti, il limite di un prodotto è il prodotto dei limiti, ecc $\ldots$.

Senza darne dimostrazione, enunciamo anche il
Teorema 10 : Date due Successioni a_n e b_n convergenti, con $a_n > 0, \forall\, n$, e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \mathfrak{L}_1 \neq 0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \mathfrak{L}_2$; allora si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = \mathfrak{L}_1^{\mathfrak{L}_2}$.

FORME INDETERMINATE
I precedenti Teoremi non valgono quando il risultato si presenta in una delle cosiddette "forme indeterminate", che di seguito elenchiamo:
$+\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; $\dfrac{\infty}{\infty}$; $\dfrac{0}{0}$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0.
Si può avere il primo caso quando si considera la differenza di due Successioni ambedue divergenti positivamente oppure la somma di una Successione divergente positivamente con una divergente negativamente; il secondo caso si può incontrare nel prodotto tra una Successione convergente a zero e una Successione divergente; similmente per il terzo e quarto caso, che provengono dal quoziente di due Successioni, mentre gli ultimi tre casi si possono incontrare per Successioni costruite come quella del Teorema 10.
Quando il risultato del limite si presenta sotto forma indeterminata, questo non è mai un risultato definitivo, che dovrà invece essere ottenuto mediante opportune semplificazioni o trasformazioni, oppure usando Teoremi che vedremo nel seguito.

Esempio 12 : Determiniamo il carattere della Successione $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
Passando al limite, abbiamo la forma indeterminata $+\infty - \infty$. Ma si ha anche:
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0\,.$$

La Successione data è quindi convergente ed il suo limite vale 0.

Vediamo invece alcuni casi che non conducono a forme indeterminate.
Anzitutto $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \pm b_n$ quando una delle due Successioni è divergente e l'altra tende ad un limite finito oppure è indeterminata, ma sempre comunque limitata.

Esempio 13 : Determiniamo il carattere della Successione $a_n = n - \operatorname{sen} n$.
Posto $b_n = n$ e $c_n = \operatorname{sen} n$, si ha che la Successione b_n è divergente positivamente, mentre la c_n è indeterminata. Infatti, per la c_n si può dire solo che $-1 \le \operatorname{sen} n \le 1$, cioè che la Successione è limitata. Avremo allora che a_n è divergente positivamente. Infatti $|n - \operatorname{sen} n| \ge n-1$, per cui, scelto ε grande a piacere, basta prendere $n > \varepsilon + 1$ perchè sia verificata la definizione di limite per una Successione divergente positivamente.

Non è indeterminato il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n$ quando una delle due Successioni converge a zero e l'altra, qualunque sia il suo carattere, è limitata, per cui anche il prodotto converge a zero.
Non è indeterminato il $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ quando $a_n \to 0$ e $b_n \to \infty$ (e quindi il quoziente tende a zero), oppure quando $a_n \to \infty$ e $b_n \to 0$ (e la frazione tende all'infinito, del quale resta poi da stabilire il segno).

Esempio 14 : Determiniamo il carattere della Successione $a_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$. Il numeratore è limitato, mentre il denominatore aumenta illimitatamente, per cui sarà $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Infatti si ha: $\left|\dfrac{\operatorname{sen} n}{n}\right| \le \dfrac{1}{n} < \varepsilon$ e quindi basta prendere $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, perchè sia soddisfatta la definizione di limite per una Successione convergente a zero.

Non è poi indeterminato il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n}$, quando $a_n \to +\infty$ e $b_n \to -\infty$, nel qual caso si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{b_n} = 0$, oppure quando $a_n \to 0$ e $b_n \to \infty$, per cui si ha che $a_n^{b_n}$ tende a zero se $b_n \to +\infty$, mentre $a_n^{b_n}$ tende a $+\infty$ quando $b_n \to -\infty$.

SUCCESSIONI MONOTONE
Diamo ora la seguente
Definizione 12 : (di Successione monotòna): Una Successione a_n si dice monotòna se, da un certo indice n_0 in poi, $\forall\, n_1, n_2$: $n_0 < n_1 < n_2$, si ha che:
$a_{n_1} \le a_{n_2}$, (Successione monotòna crescente), oppure
$a_{n_1} < a_{n_2}$, (Successione monotòna strettamente crescente), oppure
$a_{n_1} \ge a_{n_2}$, (Successione monotòna decrescente), oppure
$a_{n_1} > a_{n_2}$, (Successione monotòna strettamente decrescente).
Per le Successioni monotòne vale il seguente
Teorema 11 : Ogni Successione monotòna è regolare, ed inoltre si ha:
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \operatorname{Sup}\{f(\mathbb{N})\}$ se a_n è crescente,
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \operatorname{Inf}\{f(\mathbb{N})\}$ se a_n è decrescente.

Dimostrazione : Proviamo solo la prima parte della tesi, potendosi con procedura analoga dimostrare l'altra. Distinguiamo due casi : a_n non limitata e a_n limitata.
Sia a_n crescente e non limitata. Allora, $\forall\,\varepsilon > 0$ esiste almeno un indice $n(\varepsilon)$ tale che $\left|a_{n(\varepsilon)}\right| > \varepsilon$; preso $n > n(\varepsilon)$, essendo la Successione crescente, sarà anche:
$|a_n| \geq \left|a_{n(\varepsilon)}\right| > \varepsilon\,,\ \forall\,n > n(\varepsilon)$, e quindi avremo che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty = \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}$.
Sia poi a_n crescente e limitata; ovviamente, $\forall\,n\,,\ a_n \leq \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}$.
Per la definizione di Estremo superiore, $\forall\,\varepsilon > 0$ si può determinare almeno un indice $n(\varepsilon)$ tale che $\text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\} - \varepsilon < a_{n(\varepsilon)} < \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}$.
$\forall\,n > n(\varepsilon) > n_0$ si ha, dato che la Successione a_n è crescente: $a_n > a_{n(\varepsilon)}$, e da $a_n < \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}$ segue $\text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\} - \varepsilon < a_n < \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}$ e quindi $n > n(\varepsilon)$ implica che $|a_n - \text{Sup}\,\{f(\mathbb{N})\}| < \varepsilon$ per ogni indice $n > n(\varepsilon)$, ovvero che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \text{Sup}\{f(\mathbb{N})\}$.
Procedendo in modo analogo si dimostra la seconda parte della tesi.●

Esempio 15 : Utilizziamo questo Teorema per studiare la Successione $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.
Verifichiamo anzitutto che essa è crescente, ovvero facciamo vedere che:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}\,.$$

Questa disequazione è soddisfatta quando:

$$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n > \frac{n-1}{n}\text{ , ovvero se } \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}\,.$$

Ma questa è sempre vera, come si vede subito sostituendo, nella disuguaglianza di Bernoulli $(1+h)^n > 1 + n\,h$, ad h il valore $-\dfrac{1}{n^2}$.
Usando varie procedure, si può poi dimostrare che, $\forall\,n$, risulta $2 \leq \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$.
Quindi la Successione è monotòna crescente e limitata, per cui, per il Teorema precedente, ammette limite finito.
Il valore di questo limite è un numero irrazionale, molto importante nell'Analisi matematica, che viene denotato con la lettera "e", si chiama numero di Nepero e vale circa $e \cong 2.71828182845...$.

Esempio 16 : Determinare il carattere della Successione $a_n = n\,(\log n - \log\,(n+1))$.
Se passiamo al limite, il termine dentro parentesi presenta una forma indeterminata del tipo $+\infty - \infty$. Ma si ha anche:

$$\lim_{n\to+\infty} n\,(\log n - \log\,(n+1)) = \lim_{n\to+\infty}\left[n \cdot \log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right] = \lim_{n\to+\infty} \log\left(\frac{n}{n+1}\right)^n =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \log \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} = \log\frac{1}{e} = -1\,.$$

La Successione è quindi convergente al limite -1.

SUCCESSIONI DI CAUCHY
Vediamo ora l'importante
Definizione 13 (di Successione di Cauchy) :

La Successione a_n si dice Successione di Cauchy se $\forall\,\varepsilon > 0$ si può determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, per ogni coppia di indici n_1 e n_2: $n_1 > n(\varepsilon)$, $n_2 > n(\varepsilon)$, si ha $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.
Oppure, equivalentemente:
Una Successione a_n si dice di Cauchy se $\forall\,\varepsilon > 0$ si può determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che, per ogni $n > n(\varepsilon)$ e qualunque sia $p \in \mathbb{N}$, si ha $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Si può dimostrare che vale il seguente:
Teorema 12 : In $\mathbb{R}$, una Successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.

Questo Teorema equivale ad affermare che condizione necessaria e sufficiente affinchè una Successione sia convergente è che $\forall\,\varepsilon > 0$ esista un indice $n(\varepsilon)$, tale che, per ogni coppia di indici n_1 e n_2, $n_1 > n(\varepsilon)$, $n_2 > n(\varepsilon)$, si abbia $|a_{n_1} - a_{n_2}| < \varepsilon$.
E' bene notare come nella condizione di Cauchy non compaia il valore del limite della Successione.

TEOREMI DI CESARO
Daremo ora una rassegna di Teoremi, particolarmente utili per la determinazione del carattere di una Successione, ed in particolar modo per la risoluzione delle forme indeterminate.
Vale anzitutto il seguente:
Teorema 13 : Siano date due Successioni a termini positivi a_n e b_n; se a_n è convergente e se, almeno da un certo indice n_0 in poi, risulta $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, allora anche b_n è convergente.
Dimostrazione : Essendo le Successioni a termini positivi, dalla $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ otteniamo $\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \leq \dfrac{b_n}{a_n}$, cioè la Successione di termine generale $\dfrac{b_n}{a_n}$ è monotòna decrescente, inoltre è a termini positivi, quindi è inferiormente limitata dallo 0, ed allora, per il Teorema 11, ha limite finito. Poichè $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot \dfrac{b_n}{a_n}$, per il Teorema sul limite del prodotto segue la tesi.●

Teorema 14 (di Cesàro) : Siano a_n e b_n due Successioni, e sia b_n monotòna divergente (positivamente o negativamente). Se esiste, finito o infinito, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, allora esiste anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ ed è uguale, ovvero $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$.
Dimostrazione : Prendiamo il caso di b_n Successione monotòna divergente positivamente e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = k \in \mathrm{R}$. Per la definizione di limite, avremo che $\forall\,\varepsilon > 0$ esiste $n(\varepsilon)$ tale che, $\forall\, n > n(\varepsilon)$ si ha $\left| \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - k \right| < \varepsilon$, ovvero $k - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < k + \varepsilon$, ed essendo b_n per ipotesi crescente, sarà $b_{n+1} - b_n > 0$, e quindi avremo:
$(k - \varepsilon) \cdot (b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (k + \varepsilon) \cdot (b_{n+1} - b_n)$.
Se scegliamo un qualunque indice $\overline{n} > n(\varepsilon)$, e prendiamo $n > \overline{n}$, sostituendo nell'ultima disequazione, al posto di n, di volta in volta, $n-1$, $n-2$, ecc... fino ad $\overline{n}$, avremo:
$(k - \varepsilon) \cdot (b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (k + \varepsilon) \cdot (b_{n+1} - b_n)$,
$(k - \varepsilon) \cdot (b_n - b_{n-1}) < a_n - a_{n-1} < (k + \varepsilon) \cdot (b_n - b_{n-1})$,
$(k - \varepsilon) \cdot (b_{n-1} - b_{n-2}) < a_{n-1} - a_{n-2} < (k + \varepsilon) \cdot (b_{n-1} - b_{n-2})$,
....
$(k - \varepsilon) \cdot (b_{\overline{n}+1} - b_{\overline{n}}) < a_{\overline{n}+1} - a_{\overline{n}} < (k + \varepsilon) \cdot (b_{\overline{n}+1} - b_{\overline{n}})$,

dalle quali, sommando termine a termine, si ha:
$(k-\varepsilon)\cdot(b_{n+1}-b_{\overline{n}}) < a_{n+1}-a_{\overline{n}} < (k+\varepsilon)\cdot(b_{n+1}-b_{\overline{n}})$,
e dividendo per $b_{n+1} > 0$, otteniamo :
$(k-\varepsilon)\cdot\left(1-\dfrac{b_{\overline{n}}}{b_{n+1}}\right)+\dfrac{a_{\overline{n}}}{b_{n+1}} < \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < (k+\varepsilon)\cdot\left(1-\dfrac{b_{\overline{n}}}{b_{n+1}}\right)+\dfrac{a_{\overline{n}}}{b_{n+1}}$,
nella quale, passando al limite per $n\to+\infty$, dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}=+\infty$, e dato che $a_{\overline{n}}$ e $b_{\overline{n}}$ sono costanti, otteniamo:
$k-\varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < k+\varepsilon$, che equivale a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=k$, ovvero la tesi.
Vediamo ora il caso $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$. Scelto $\varepsilon>0$, per la definizione di limite esisterà un indice $n(\varepsilon)$ tale che per ogni $n>n(\varepsilon)$ si ha $\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}\right|>\varepsilon$.
Dato che $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$ e $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=+\infty$, sarà anche $a_{n+1}-a_n>0$, per cui la precedente disequazione si riduce a $\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}>\varepsilon$. Procedendo come prima, scelto un qualunque indice $\overline{n}>n(\varepsilon)$, preso $n>\overline{n}$, e dato che $b_{n+1}-b_n>0$, si ha:
$a_{n+1}-a_n>\varepsilon\cdot(b_{n+1}-b_n)$,
$a_n-a_{n-1}>\varepsilon\cdot(b_n-b_{n-1})$,
$a_{n-1}-a_{n-2}>\varepsilon\cdot(b_{n-1}-b_{n-2})$,
....
$a_{\overline{n}+1}-a_{\overline{n}}>\varepsilon\cdot(b_{\overline{n}+1}-b_{\overline{n}})$,
dalle quali, sommando termine a termine, abbiamo :
$a_{n+1}-a_{\overline{n}}>\varepsilon\cdot(b_{n+1}-b_{\overline{n}})$, e dividendo per $b_{n+1}>0$ otteniamo:
$\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_{\overline{n}}}{b_{n+1}} > \varepsilon\cdot\left(1-\dfrac{b_{\overline{n}}}{b_{n+1}}\right)$, da cui, passando al limite, e dato che :
$\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}=+\infty$, si ha $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\varepsilon$, ovvero $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$.●

Esempio 17 : Determinare il carattere della Successione $a_n=\dfrac{\log n}{n}$.
Se calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n}$, questo si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Le Successioni $a_n=\log n$ e $b_n=n$ soddisfano le ipotesi del Teorema 14, per cui è:
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(n+1)-\log n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)=\log 1=0$$
per cui $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log(n+1)-\log n}{(n+1)-n}=0$ e quindi la Successione $a_n=\dfrac{\log n}{n}$ è convergente a 0.
Esempio 18 : Determinare il carattere della Successione $a_n=\dfrac{k^n}{n}$, con $k\in\mathbb{R}$, $k>1$.
Dato che anche questo limite si presenta nella forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$, come nel caso precedente applichiamo il Teorema 14 ed avremo:
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k^{n+1}-k^n}{(n+1)-n}=\lim\limits_{n\to+\infty}k^n\cdot(k-1)=+\infty$, in quanto $k>1$, per cui :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{k^n}{n}=+\infty$.

Teorema 15 : (di Cesàro): Date due Successioni a_n e b_n, con $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, sia inoltre b_n monotòna (crescente o decrescente). Se esiste, finito o infinito, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, allora esiste anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ ed è uguale, ovvero $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.
La Dimostrazione di questo secondo Teorema di Cesàro si ottiene in modo analogo a quella del primo Teorema, distinguendo i casi, per il quoziente delle differenze, di un limite finito e di uno infinito.
E' comunque bene far notare come i Teoremi 14 e 15 non siano invertibili, ovvero, se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ non è detto che esista il $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.

Dai Teoremi di Cesàro si ricavano poi i seguenti:
Teorema 16 : Data la Successione c_n, esista, finito o infinito $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$; allora è anche:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{c_1+c_2+...+c_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
Ovvero, la media aritmetica dei termini di una Successione tende allo stesso limite della Successione.
Dimostrazione : Poniamo $a_n = c_1+c_2+...+c_n$ e $b_n = n$. Applicando il Teorema 14 si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ e quindi la tesi.●

Esempio 19 : Determiniamo il Carattere della Successione $c_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{n^2}$.
Essendo $c_n = \dfrac{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}}{n}$, posto $a_n = \frac{1}{n}$, utilizzando il Teorema 16 avremo:
$\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, e quindi la Successione data converge a 0.

Teorema 17 : Sia c_n una Successione a termini positivi, ed esista, finito o infinito, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$; allora è anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\ ...\cdot c_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n$.
Ovvero, la media geometrica dei termini di una Successione tende allo stesso limite della Successione.
Dimostrazione : Poniamo ora $a_n = \log c_1 + \log c_2 + ... + \log c_n$ e $b_n = n$. Applicando il Teorema 14 al quoziente $\frac{a_n}{b_n}$, avremo:
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \log c_{n+1} = \log \lim\limits_{n\to+\infty} c_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} =$
$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\log c_1 + \log c_2 + ... + \log c_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \log\left(\sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\ ...\cdot c_n}\right) =$
$= \log \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{c_1\cdot c_2\cdot\ ...\cdot c_n}$, da cui la tesi.●

Teorema 18 : Data la Successione a termini positivi a_n, esista, finito o infinito, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$; allora esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.
Dimostrazione : Poniamo $b_1 = a_1$, $b_2 = \frac{a_2}{a_1}$, $b_3 = \frac{a_3}{a_2}$,..., $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$.
Avremo allora $\sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot ...\cdot b_n} = \sqrt[n]{a_n}$ da cui, per il Teorema 17, sarà anche:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ... \cdot b_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} .\bullet$$

Esempio 20 : Determinare il carattere della Successione $a_n = \sqrt[n]{n}$.

Applicando il Teorema 18, abbiamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, per cui sarà anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Esempio 21 : Determinare il carattere della Successione $a_n = \sqrt[n]{n!}$.

Per il Teorema 18, avremo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty$, per cui sarà anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$.

Esempio 22 : Determinare il carattere della Successione $a_n = \sqrt[n]{k}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Usiamo il Teorema 18. Avremo, calcolando $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{k} = 1$, da cui $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{k} = 1$. Si noti poi come, per raggiungere il risultato, non serva distinguere i casi $0 < k < 1$ e $1 < k$. Se il radicando è costante, quindi, all'aumentare dell'ordine della radice il risultato tende sempre ad 1.

Teorema 19 : Sia data la Successione a termini positivi a_n, e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$, con $0 \le k < 1$; allora è anche $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Dimostrazione : Per il Teorema 18 sarà anche $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, e quindi, in base alla definizione di limite, scelto $\varepsilon : 0 < k < \varepsilon < 1$, avremo che, da un certo indice $n(\varepsilon)$ in poi, sarà: $0 < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon$, ovvero $a_n < \varepsilon^n$, ma essendo $\varepsilon < 1$, sarà $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon^n = 0$, e per il Teorema del confronto, segue la tesi.●

Esempio 23 : Determinare il carattere della Successione $a_n = \frac{k^n}{n!}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 1$.

Usando il Teorema 19, avremo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{k^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{n+1} = 0$.

Essendo questo risultato minore di 1, si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k^n}{n!} = 0$.

Esempio 24 : Determinare il carattere della Successione $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

Usiamo ancora il Teorema 19, e quindi calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n!} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 .$$

Essendo il valore di questo limite minore di 1, avremo allora che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Ovviamente, vista la dimostrazione del Teorema 19, varrà anche il

Teorema 20 : Sia data la Successione a termini positivi a_n, e sia $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, con $0 \le k < 1$; allora è anche $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Nell'esempio che segue si ordinano le Successioni elementari divergenti in base alla loro maggiore o minore rapidità nel tendere a $+\infty$.

Esempio 25 : Date le Successioni divergenti :
1) $a_n = n$, 2) $a_n = \log n$, 3) $a_n = n^n$, 4) $a_n = n!$,
5) $a_n = n^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, 6) $a_n = n^\beta$ $(\beta > 1)$, 7) $a_n = k^n$ $(k > 1)$,
ordiniamole secondo la loro rapidità nel tendere a $+\infty$.
Per ottenere questa classificazione, sapendo che sono tutte divergenti, ci baseremo sul risultato del $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$. E precisamente:
se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in \mathbb{R}, k \neq 0$, le due Successioni divergono con la stessa rapidità;
se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, la Successione a denominatore diverge con rapidità maggiore;
se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, la Successione a numeratore diverge con rapidità maggiore;
se $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ non esiste, le due Successioni non sono confrontabili.
Confrontiamo 6) e 5). Avremo che $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{n^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\beta-\alpha} = +\infty$, in quanto $\beta - \alpha > 0$, quindi 6) diverge più rapidamente di 5) ed allo stesso modo si vede che 6) diverge più rapidamente di 1), mentre 1) diverge più rapidamente di 5).
L'Esempio 17 ci dice che 1) diverge più rapidamente di 2);
l'Esempio 18 ci mostra come 7) diverga più rapidamente di 1);
l'Esempio 23 ci mostra come 7) diverga meno rapidamente di 4);
l'Esempio 24 ci mostra come 3) diverga più rapidamente di 4).
Rimangono da confrontare 5) con 2) e 6) con 7). Vediamo il confronto tra 5) e 2).
Si ha $\frac{n^\alpha}{\log n} = \frac{e^{\alpha \log n}}{\log n}$, e posto $p = [\log n]$ ed $e^\alpha = k$, avremo $\frac{n^\alpha}{\log n} \geq \frac{k^p}{p+1}$.
Ma $\frac{k^p}{p+1} \to +\infty$ se $p \to +\infty$, e per il Teorema del confronto si ha che 5) diverge più rapidamente di 2).
Per il confronto tra 6) e 7) usiamo il Teorema 20.
Calcoliamo $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^\beta}{k^n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^\beta}{k} = \frac{1}{k} < 1$, in quanto $k > 1$ per cui $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^\beta}{k^n} = 0$, quindi la 6) diverge più lentamente della 7).
Scrivendo da sinistra a destra, nell'ordine dalla meno alla più rapida, avremo:
$\log n \ll n^\alpha \; (0 < \alpha < 1) \ll n \ll n^\beta \; (1 < \beta) \ll k^n \ll n! \ll n^n$.

SUCCESSIONI DEFINITE PER RICORRENZA
Non tutte le Successioni vengono espresse nella forma esplicita $n \to a_n$; esiste anche un altro modo, quello delle cosiddette Successioni definite per ricorrenza.
Assegnare una Successione definendola per ricorrenza significa assegnare il primo termine della Successione, a_0, ed una relazione analitica che leghi il termine generale a_n con uno o più dei termini precedenti.
Sono, ad esempio, Successioni definite per ricorrenza, le seguenti:

1) $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n = 1 + \log a_{n-1} \end{cases}$ oppure 2) $\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2} \\ a_n = \text{sen}\, a_{n-1} \end{cases}$.

Utilizzeremo questi due esempi per illustrare sommariamente la procedura da seguire nella ricerca del carattere, e quindi del limite, di una Successione definita per ricorrenza.
Partiamo anzitutto dall'ipotesi che il limite della Successione, finito o infinito, esista, ed indichiamolo con $\mathfrak{L}$.
Dato che, ovviamente, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-1} = ... = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n-k}$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, passando al limite per $n \to +\infty$ nella relazione analitica tra i termini generali, si ottiene una equazione nell'incognita $\mathfrak{L}$, di cui vanno ricercate sia le soluzioni reali che le eventuali soluzioni "infinite".
Prendiamo ad esempio la 1); passando al limite in ambedue i membri della seconda equazione, otteniamo $\mathfrak{L} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \log a_{n-1}) = 1 + \log \mathfrak{L}$.
L'equazione $\mathfrak{L} = 1 + \log \mathfrak{L}$ ha soluzione $\mathfrak{L} = 1$, e, come caso limite, vale per $\mathfrak{L} = +\infty$.
Si tratta ora di vedere se uno dei due casi può essere quello giusto.
Vediamo, per induzione, che la $1)$ è una Successione i cui termini sono tutti maggiori di 1; infatti: $a_0 = 2 > 1$, e supposto $a_{n-1} > 1$, avremo che $a_n = 1 + \log a_{n-1} > 1$ in quanto $\log a_{n-1} > 0$. Sempre per induzione, vediamo che la Successione è monotòna decrescente. Infatti si ha $a_0 = 2 > 1 + \log 2 = a_1$, e supposto poi $a_{n-1} > a_n$, vediamo che da questo segue $a_n > a_{n+1}$.
Infatti abbiamo $a_n = 1 + \log a_{n-1} > 1 + \log a_n = a_{n+1}$.
Essendo monotòna decrescente, con i termini tutti maggiori di 1, essa ammette limite finito, e questo non può che essere, tra le due possibili soluzioni, il valore 1.
Passando all'esempio $2)$ e operando, come prima, il passaggio al limite, avremo l'equazione $\mathfrak{L} = \operatorname{sen} \mathfrak{L}$. L'unica possibile soluzione è $\mathfrak{L} = 0$.
Analizzando i termini della Successione, vediamo che essi sono tutti positivi. Infatti $a_0 = \dfrac{1}{2}$, e se $0 < a_n < 1$, allora segue che anche $a_{n+1} = \operatorname{sen} a_n > 0$.
Per induzione, poi, vediamo che la Successione è decrescente. Infatti $\dfrac{1}{2} > \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}$, e supposto $a_{n-1} > a_n$, da questo segue $a_{n+1} = \operatorname{sen} a_n < \operatorname{sen} a_{n-1} = a_n$ e quindi la Successione è decrescente, ed essendo i termini tutti positivi, il suo limite non può essere che 0.

SERIE NUMERICHE

Data una Successione di termine generale $a_n,\ n \to a_n$, introduciamo tra i suoi elementi, in modo puramente formale, il simbolo di somma. L'espressione:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

è detta Serie numerica di termine generale a_n.
E' bene ribadire il carattere puramente formale dell'espressione introdotta, in quanto l'operazione di somma non è definita se il numero degli addendi è infinito. Come per le Successioni, anche per le Serie definiremo il cosiddetto carattere, per la determinazione del quale sarà rilevante il comportamento del termine generale a_n al tendere di n all'infinito, mentre avrà solo relativa importanza un qualunque numero finito di termini iniziali.

Per questo, quando sarà sufficiente, indicheremo una Serie semplicemente con $\sum^{+\infty} a_n$.

SOMME RIDOTTE - CARATTERE DI UNA SERIE

Data la Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, costruiamo da essa una Successione, $\{s_n\}$, detta Successione delle (Somme) Ridotte, definita per ricorrenza nel modo seguente: $\begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_n = s_{n-1} + a_n \end{cases}$.
Avremo quindi, per esteso:
$s_0 = a_0$;
$s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1$;
$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2$;
....
$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = s_{n-1} + a_n$.

Definiamo carattere della Serie $\sum^{+\infty} a_n$ il carattere della Successione $\{s_n\}$, e quindi:
Definizione 14 (di Serie convergente) :
La Serie $\sum^{+\infty} a_n$ si dice convergente quando $\lim_{n\to+\infty} s_n$ esiste ed è finito;
Definizione 15 (di Serie divergente positivamente o negativamente) :
La Serie $\sum^{+\infty} a_n$ si dice divergente positivamente se $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$, si dice divergente negativamente se $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$;
Definizione 16 (di Serie indeterminata) :
La Serie $\sum^{+\infty} a_n$ si dice indeterminata quando $\lim_{n\to+\infty} s_n$ non esiste.

Definiamo quindi il carattere di una Serie mediante la somma di un numero finito di termini iniziali, da a_0 fino ad a_n, cioè la Ridotta n-esima, e valutando poi il comportamento di questa somma all'aumentare del numero degli addendi.
Quando la Successione delle Ridotte è convergente, ovvero $\lim_{n\to+\infty} s_n = \mathrm{S}$, il valore S verrà detto Somma della Serie, e scriveremo, solo formalmente: $\sum^{+\infty} a_n = \mathrm{S}$.

Vale anzitutto il seguente:
Teorema 21 : Una Serie i cui termini, almeno da un certo indice in poi, siano tutti positivi (o tutti negativi), non può essere indeterminata.
Dimostrazione: In questo caso infatti la Successione $\{s_n\}$ delle somme ridotte è monotòna (crescente se i termini della Serie sono positivi, decrescente se negativi), e una Successione monotòna non può essere indeterminata.●

Passiamo quindi ad enunciare le seguenti:
Definizione 17 (di convergenza per una Serie) :
Si dice che la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è convergente ed ha per somma S se:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |s_n - \mathrm{S}| < \varepsilon$.
Definizione 18 (di divergenza positiva per una Serie) :
Si dice che la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è divergente positivamente se $\forall \varepsilon \; \exists \; n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow s_n > \varepsilon$.
Definizione 19 (di divergenza negativa per una Serie) :

Si dice che la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è divergente negativamente se $\forall\, \varepsilon\ \exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow s_n < \varepsilon\,.$

Data una Serie $\sum^{+\infty} a_n$ che risulti convergente, sarà:
$\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} s_{n+p} = \mathrm{S}$ e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty}(s_{n+p} - s_n) = \mathrm{S} - \mathrm{S} = 0\,,$
dalla quale, applicando la definizione di limite, otteniamo che:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$, ovvero
$|s_{n+p} - s_n| = |a_0 + a_1 + ... + a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p} - (a_0 + a_1 + ... + a_n)| =$
$= |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon\,.$
Poniamo $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} = \mathrm{R}_{n,p}$, quantità che viene detta Resto di ordine n, p della Serie e rappresenta la somma dei primi p termini della Serie dopo l'n-esimo.
La convergenza può essere quindi così espressa:
una Serie è convergente quando il Resto di ordine n, p, con $p \in \mathbb{N}$ qualunque, è una quantità che, almeno da un certo indice $n(\varepsilon)$ in poi, può essere resa piccola a piacere.
Dovendo questa condizione valere qualunque sia p, si ha, nel caso $p = 1$:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) : n > n(\varepsilon) \Rightarrow |\mathrm{R}_{n,1}| = |a_{n+1}| < \varepsilon$, e questo implica che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0\,.$
Vale quindi il seguente:
Teorema 22 : Se una Serie è convergente, il suo termine generale a_n è infinitesimo.

Quindi la condizione $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ è necessaria per la convergenza di una Serie, senza essere però, come subito vediamo, sufficiente.
Esempio 26 : Consideriamo la seguente Serie, detta Serie armonica: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\,.$
Si ha che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, ovvero è verificata la condizione necessaria per la convergenza.
Per far vedere che questa non è però una Serie convergente, consideriamo un caso particolare, ovvero il Resto di ordine n,n. Avremo:
$|\mathrm{R}_{n,n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \right|.$
Se maggioriamo ogni denominatore con la quantità $n + n$, avendo aumentato i denominatori otteniamo frazioni inferiori, e questa nuova somma sarà minore del Resto $\mathrm{R}_{n,n}$; le frazioni sono ora tutte uguali ed otteniamo:
$|\mathrm{R}_{n,n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+n} \right| > \left| \frac{1}{n+n} + ... + \frac{1}{n+n} \right| = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}\,,$
e quindi esiste un Resto, $\mathrm{R}_{n,n}$, che $\forall\, n$ è più grande di $\frac{1}{2}$, e non può allora essere reso piccolo a piacere. Essendo poi i termini della Serie armonica tutti positivi, essa non può essere indeterminata e non potendo, per quanto visto sopra, convergere, essa è divergente.

Esempio 27 : Determinare il carattere della Serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}.$
Calcolando il limite del termine generale avremo: $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} \neq 0$. Non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza la Serie, che non può essere indeterminata in quanto a termini tutti positivi, è divergente.

Applicando invece alla Successione $\{s_n\}$ la condizione necessaria e sufficiente di Cauchy (Teorema 12) per la convergenza di una Successione, avremo il seguente:

Teorema 23 : (di Cauchy per la convergenza di una Serie): Condizione necessaria e sufficiente affinchè la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ sia convergente è che $\forall \varepsilon > 0$ si possa determinare un indice $n(\varepsilon)$ tale che per ogni coppia di indici n_1 e n_2, $n_1 > n(\varepsilon)$, $n_2 > n(\varepsilon)$, si abbia: $|s_{n_1} - s_{n_2}| < \varepsilon$.

Supposto $n_2 > n_1$, ponendo $n_2 = n_1 + p$, si ha $|s_{n_1+\mathrm{p}} - s_{n_1}| < \varepsilon$, $\forall n_1 > n(\varepsilon)$ e $\forall p \in \mathbb{N}$.

Da quest'ultima disequazione, sostituendo alle Ridotte $s_{n_1+\mathrm{p}}$ ed s_{n_1} il loro valore, otteniamo:

$|s_{n_1+p} - s_{n_1}| = |a_0 + a_1 + ... + a_{n_1} + a_{n_1+1} + ... + a_{n_1+p} - (a_0 + a_1 + ... + a_{n_1})| =$
$= |a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_1+p}| < \varepsilon$.

Ma $a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + ... + a_{n_1+p} = \mathrm{R}_{n_1,p}$, Resto di ordine n_1, p della Serie che rappresenta la somma dei primi p termini della Serie dopo l'n_1-esimo.

La condizione di convergenza di Cauchy può essere quindi espressa dicendo che una Serie è convergente quando il Resto di ordine n, p, con p qualunque, è una quantità che, almeno da un certo indice $n(\varepsilon)$ in poi, può essere resa piccola a piacere.

OPERAZIONI SULLE SERIE

Date due Serie numeriche, $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$, e scelte due costanti $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, definiamo la combinazione lineare delle due Serie come la Serie $\sum^{+\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$.

Se le due Serie $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ sono convergenti, ed hanno per Somma rispettivamente S_1 ed S_2, applicando alle loro Ridotte i Teoremi sulle Successioni, avremo che anche la Serie $\sum^{+\infty} (\alpha\, a_n + \beta\, b_n)$ risulta convergente e la sua Somma vale: $\alpha\, \mathrm{S}_1 + \beta\, \mathrm{S}_2$.

La combinazione lineare di due Serie convergenti dà quindi luogo ad una Serie convergente ed avente per somma la combinazione lineare delle somme.

In particolare, la Somma e la differenza di due Serie convergenti sono anch'esse Serie convergenti. Se invece una Serie converge e l'altra diverge, la somma e la differenza risultano Serie divergenti.

SERIE GEOMETRICHE

Dato $q \in \mathbb{R}$, si dice Serie geometrica di ragione q una Serie del tipo $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, cioè una Serie i cui termini formino una Progressione geometrica.

Per una Serie geometrica avremo:

$s_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ da cui, moltiplicando ambedue i membri per q:
$q \cdot s_n = q + q^2 + ... + q^{n+1}$ e sottraendo dalla seconda uguaglianza la prima:
$(q-1) \cdot s_n = q^{n+1} - 1$ ovvero:

$$s_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Se calcoliamo $\lim_{n \to +\infty} s_n$, avremo i seguenti casi:

-se $|q| < 1$, cioè se $-1 < q < 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$, e quindi $\lim_{n \to +\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$; la Serie geometrica è convergente e la sua Somma vale $\frac{1}{1-q}$;

-se $q > 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = +\infty$ e la Serie geometrica diverge positivamente;
-se $q < -1$, $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = \infty$, tenendo però presente che q^{n+1} assume valori positivi quando n è dispari e valori negativi quando n è pari; la Successione delle Ridotte assume allora valori in quantità sempre piu grandi, ma con segno alternativamente positivo e negativo; si dice in questo caso che la Serie geometrica diverge oscillando (alcuni la classificano come indeterminata);
-se $q = +1$, sarà $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = 1 + 1 + ... + 1 + ...$, per cui $s_n = n + 1$, e la Serie geometrica risulta divergente;
-se $q = -1$, infine, otteniamo la Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + ...$, per la quale:
$s_n = \begin{cases} 1 \text{ per } n \text{ pari} \\ 0 \text{ per } n \text{ dispari} \end{cases}$; tale Serie geometrica è quindi indeterminata.

Esempio 28 : Vediamo il carattere della Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - ....$
Mettendo in evidenza la costante moltiplicativa 3 otteniamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - ...\right) = 3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

ovvero una Serie geometrica di ragione $-\frac{1}{2}$, e quindi convergente.
La sua Somma sarà allora data da $\mathrm{S} = 3 \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$.

Esempio 29 : Studiamo la Serie $\sum^{+\infty} a_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243} + ...$
Isolando i primi due termini e mettendo in evidenza nei rimanenti $\frac{4}{9}$, si avrà:

$$\sum^{+\infty} a_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - ...\right) = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n,$$

ovvero una Serie geometrica di ragione $-\frac{2}{3}$, moltiplicata per $\frac{4}{9}$ e con l'aggiunta di due termini iniziali. Essendo $\left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, la Serie sarà convergente con Somma:

$$\mathrm{S} = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{67}{60}.$$

SERIE A SEGNI ALTERNI

Si dice a segni alterni una Serie i cui termini, almeno da un certo indice in poi, assumono segno alternativamente positivo e negativo.
Scriveremo una Serie a segni alterni nella forma $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot |a_n|$.
Per lo studio del carattere delle Serie a segni alterni vale il seguente:

Teorema 24 **(Criterio di Leibnitz)** : Sia data una Serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \cdot |a_n|$;
se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ e se la Successione $|a_n|$, almeno da un certo indice n_0 in poi, è monotòna decrescente, allora la Serie è convergente.
Inoltre, le ridotte di indice pari forniscono un valore approssimato per eccesso della Somma della Serie, mentre le ridotte di indice dispari ne danno uno approssimato per difetto; infine, l'errore che si commette calcolando, invece della Somma S della Serie, la Ridotta s_n, è minore del primo termine non utilizzato, ovvero: $|S - s_n| \le |a_{n+1}|$.
Dimostrazione: Sapendo che $|a_n|$ è monotòna decrescente, avremo che:
a) $s_{2n+2} = s_{2n} - |a_{2n+1}| + |a_{2n+2}| \le s_{2n}$;
b) $s_{2n+1} = s_{2n-1} + |a_{2n}| - |a_{2n+1}| \ \ge \ s_{2n-1}$;
c) $s_{2n+1} = s_{2n} - |a_{2n+1}| \le s_{2n}$.
Quindi, in base alle disequazioni a) e b), abbiamo che la Successione delle Ridotte di indice pari è decrescente e quella delle dispari è crescente.
Inoltre, per la c), è facile vedere che:
$s_{2n+1} \le s_{2n} \le ... \le s_2 = |a_0| - |a_1| + |a_2|$, e che
$s_{2n} \ge s_{2n+1} \ge ... \ge s_1 = |a_0| - |a_1|$,
ovvero la Successione delle Ridotte di indice pari è limitata inferiormente, mentre quella delle dispari è limitata superiormente.
Allora esistono finiti $\lim_{n\to+\infty} s_{2n+1} = \sigma_1$ e $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = \sigma_2$, con $\sigma_2 \le s_{2n}$ e $\sigma_1 \ge s_{2n+1}$, $\forall\, n$.
Inoltre $\sigma_2 - \sigma_1 = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n} - s_{2n+1}) = \lim_{n\to+\infty}|a_{2n+1}| = 0$, e quindi esiste finito S, valore comune del limite delle Ridotte di indice pari e di quelle di indice dispari, nonchè Somma della Serie a segni alterni.
Essendo $\sigma_2 \le s_{2n}$ e $\sigma_1 \ge s_{2n+1}$, con $\sigma_2 = \sigma_1 = S$, sarà anche: $s_{2n+1} \le S \le s_{2n}$ da cui:
$s_{2n} - S \le s_{2n} - s_{2n+1} = |a_{2n+1}|$ e $S - s_{2n+1} \le s_{2n+2} - s_{2n+1} = |a_{2n+2}|$ e quindi, qualunque sia n, pari o dispari, si ha: $|S - s_n| \le |a_{n+1}|$.●

Esempio 30 : Consideriamo la Serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + ...$, ovvero una Serie a segni alterni. Verifichiamo che essa converge con il Criterio di Leibnitz.
Infatti $\lim_{n\to+\infty}|a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!} = 0$, ed inoltre $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} = |a_n|$, $\forall\, n > 1$.
Quindi sono soddisfatte le due condizioni del Criterio di Leibnitz, e la Serie è convergente.
Calcoliamo allora, a meno di $\frac{1}{1000}$, la Somma della Serie.
Esaminando i primi termini della Serie si ha:
$|a_7| = \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}$ e $|a_6| = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720} > \frac{1}{1000}$, e quindi per avere un valore approssimato della Somma S a meno di $\frac{1}{1000}$ basterà calcolare la ridotta s_6, ossia:
$s_6 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$ 0,368 circa.
Quindi $|S - 0{,}368| < \frac{1}{1000}$, ovvero: $0{,}368 - \frac{1}{1000} < S < 0{,}368 + \frac{1}{1000}$.

SERIE TELESCOPICHE

Limitando la nostra trattazione al caso più semplice (si veda al proposito l'Esempio n. 31) diremo una Serie $\sum^{+\infty} a_n$ Telescopica se ogni suo termine a_n può essere espresso come differenza di due termini di una stessa Successione b_n, calcolati per due diversi valori dell'indice, ovvero se:

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (b_n - b_{n+k})$, con $k \in \mathbb{N}$.

Per le Serie Telescopiche avremo:

$$s_n = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n =$$
$$= (b_0 - b_k) + (b_1 - b_{k+1}) + ... + (b_k - b_{k+k}) + ... + (b_{n-k} - b_n) + (b_{n-k+1} - b_{n+1}) + ...$$
$$+ (b_n - b_{n+k}),$$

per cui, eliminando i termini uguali e di segno opposto, si ottiene:

$s_n = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} - b_{n+1} - b_{n+2} - ... - b_{n+k}$.

Passando al limite per $n \to +\infty$, se esiste ed è finito:

$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = ... = \lim_{n\to+\infty} b_{n+k} = \mathcal{B}$, avremo anche:

$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_0 + b_1 + b_2 + ... + b_{k-1} - k\,\mathcal{B}$, somma di costanti e quindi valore finito.

Affinchè la Serie Telescopica $\sum^{+\infty} a_n$ sia convergente occorre quindi che sia convergente la Successione di termine generale b_n, ed allora la Somma della Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è data dalla differenza tra i primi k termini della Successione b_n e k volte il valore del limite della b_n stessa.

Esempio 31 : Determiniamo il carattere della Serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Abbiamo $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1}$, una volta posto $b_n = \frac{1}{n}$.

La Serie è quindi Telescopica, e possiamo scrivere:

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ ...\ + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

da cui otteniamo:

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Passando al limite si ha $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$, quindi la Serie è convergente con Somma 1.

Esempio 32 : Determinare il carattere della Serie : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{n(n+1)}\right]$.

La Serie data può essere espressa come differenza di due Serie, ovvero:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{n(n+1)}\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Essendo queste due Serie convergenti, sarà convergente anche la Serie data e la sua Somma sarà uguale alla differenza delle Somme delle due Serie.

La prima è una Serie geometrica di ragione $\frac{2}{3}$, nella quale, però, l'indice parte da 1 e non da zero; la sua Somma sarà quindi data da $\mathrm{S}_1 = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - 1 = 2$.

L'altra Serie è convergente ed ha per Somma $S_2 = 1$ (vedi Esempio precedente) .
Sarà quindi $S = S_1 - S_2 = 1$.

Esempio 33 : Consideriamo la Serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)$. Abbiamo che:

$\log\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \log(n+1) + \log(n-1) - 2\log n$, per cui la Ridotta s_n sarà data da:

$$s_n = (\log 3 + \log 1 - 2\log 2) + (\log 4 + \log 2 - 2\log 3) + (\log 5 + \log 3 - 2\log 4) +$$
$$+ (\log 6 + \log 4 - 2\log 5) + (\log 7 + \log 5 - 2\log 6) + (\log 8 + \log 6 - 2\log 7) + ...$$
$$... + (\log(n-1) + \log(n-3) - 2\log(n-2)) +$$
$$+ (\log n + + \log(n-2) - 2\log(n-1)) + + (\log(n+1) + \log(n-1) - 2\log n)$$

dalla quale, dato che ogni termine appare tre volte, due con segno positivo ed una, moltiplicato per 2, con segno negativo, abbiamo che:

$$s_n = -\log 2 + \log(n+1) - \log n = -\log 2 + \log\frac{n+1}{n} .$$

Passando al limite otteniamo che la Serie data è convergente con somma uguale a $\log\frac{1}{2}$.

Vediamo alcuni criteri utili per determinare la convergenza di Serie che non appartengono alle categorie precedenti.

SERIE A TERMINI POSITIVI-CONVERGENZA ASSOLUTA

Appartengono a questa categoria le Serie numeriche i cui termini, almeno da un certo indice in poi, hanno tutti segno positivo. Se i termini sono tutti di segno negativo, si può mettere in evidenza la costante moltiplicativa -1, riportando così lo studio di tali Serie a quello delle Serie a termini tutti positivi. Diamo anzitutto la seguente

Definizione 20 (di Convergenza assoluta) :

La Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è detta essere assolutamente convergente se è convergente la Serie $\sum^{+\infty} |a_n|$, ovvero la Serie avente per termine generale il valore assoluto del termine generale della $\sum^{+\infty} a_n$.

Per distinguerla da questa nuova definizione, la precedente definizione di convergenza verrà detta semplice o condizionata.

Ovviamente, per le Serie a termini tutti dello stesso segno (positivo o negativo) le due definizioni coincidono, così come è facile vedere che se una Serie geometrica converge semplicemente, allora essa converge anche assolutamente e viceversa.

Vale il seguente

Teorema 25 : Se una Serie $\sum^{+\infty} a_n$ converge assolutamente, allora essa converge anche semplicemente, mentre non è vero il viceversa, ovvero una Serie può essere convergente semplicemente senza esserlo assolutamente.

Dimostrazione: Sia $\sum^{+\infty} a_n$ convergente assolutamente, ovvero sia convergente $\sum^{+\infty} |a_n|$.

Consideriamo $R_{n,p}$, Resto di ordine n, p della Serie $\sum^{+\infty} a_n$. Avremo, per la disuguaglianza triangolare:

$$|R_{n,p}| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon ,$$

in quanto l'ultima quantità non è altro se non il Resto di ordine n, p della Serie $\sum^{+\infty} |a_n|$, che è convergente dato che, per ipotesi, $\sum^{+\infty} a_n$ è convergente assolutamente. Questo secondo Resto può essere reso piccolo a piacere, ed allora può essere reso piccolo a piacere il Resto della $\sum^{+\infty} a_n$, che è quindi convergente.●

Per vedere come non valga il viceversa basta considerare la Serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, che risulta essere convergente in base al criterio di Leibnitz, ma non assolutamente convergente, in quanto la Serie formata con i valori assoluti dei suoi termini è la Serie armonica, che diverge positivamente.

CRITERI DI CONVERGENZA ASSOLUTA
Questi criteri permettono di stabilire se una data Serie sia o no convergente assolutamente, e si comprende, in base a precedenti osservazioni, come mai vengano anche chiamati criteri di convergenza per le Serie a termini positivi. Vale anzitutto il seguente:

Teorema 26 (Criterio del Confronto) : Siano $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ due Serie a termini positivi e sia, da un certo indice n_0 in poi, $a_n \geq b_n$, $\forall\, n > n_0$. Si suole dire, in questo caso, che la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è una maggiorante della $\sum^{+\infty} b_n$, e che $\sum^{+\infty} b_n$ è una minorante della $\sum^{+\infty} a_n$. Allora, se $\sum^{+\infty} a_n$ converge, converge pure $\sum^{+\infty} b_n$, mentre se $\sum^{+\infty} b_n$ diverge, diverge anche $\sum^{+\infty} a_n$. Nulla si può invece concludere quando $\sum^{+\infty} a_n$ diverge oppure quando $\sum^{+\infty} b_n$ converge.

Dimostrazione: Siano $\overline{s}_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} a_k$ e $\overline{\sigma}_n = \sum_{k=n_0+1}^{n} b_k$ le Somme ridotte delle Serie $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$, private dei termini iniziali da 0 a n_0. Essendo $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$, le due Successioni $\overline{s}_n$ e $\overline{\sigma}_n$ sono monotòne crescenti, ed inoltre sarà $\overline{s}_n \geq \overline{\sigma}_n$. Se $\sum^{+\infty} a_n$ converge, $\overline{s}_n$ è limitata superiormente, per cui è limitata superiormente $\overline{\sigma}_n$, e quindi $\sum^{+\infty} b_n$ converge. Se $\sum^{+\infty} b_n$ diverge, allora $\overline{\sigma}_n$ è illimitata superiormente, quindi è illimitata superiormente $\overline{s}_n$, per cui $\sum^{+\infty} a_n$ diverge.●

Si può esprimere il Criterio del confronto dicendo che la divergenza della minorante implica la divergenza della maggiorante, mentre la convergenza della maggiorante implica la convergenza della minorante.

Esempio 34 : Determiniamo il carattere della Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$.

Come si può facilmente verificare, $\forall\, n \geq 5$ si ha che $n^2 + 1 < 2^n$, per cui otteniamo:

$\dfrac{n^2+1}{3^n} < \dfrac{2^n}{3^n} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, termine generale di una Serie geometrica di ragione $\dfrac{2}{3}$, quindi convergente, ed allora è convergente, per il Criterio del confronto, anche la minorante, e cioè la Serie data.

Esempio 35 : Determiniamo il carattere della Serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+2}}{n^2 \cdot\ 4^{n-1}}$.

Mettendo in evidenza, scriviamo la Serie data come: $4 \cdot 3^2 \cdot \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n^2 \cdot 4^n}$.

Essendo $\dfrac{3^n}{n^2 \cdot 4^n} = \dfrac{1}{n^2} \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^n < \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$, la Serie data è minorante di una Serie geometrica convergente in quanto di ragione $\dfrac{3}{4}$, e quindi è convergente.

Esempio 36 : Determiniamo il carattere della Serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3n-5}$.

Si ha che: $\dfrac{1}{3n-5} > \dfrac{1}{3n} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{n}$, e questo è il termine generale della Serie armonica moltiplicato per $\dfrac{1}{3}$; essendo la nostra Serie una maggiorante della Serie armonica, essa è allora, per il Criterio del confronto, divergente.

Teorema 27 (Criterio del Confronto Asintotico) : Siano $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ due Serie con, almeno da un certo indice n_0 in poi, $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Allora:

-se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ esiste finito e diverso da zero, $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ hanno lo stesso carattere, ovvero convergono entrambe o divergono entrambe;

-se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, quando $\sum^{+\infty} a_n$ diverge, allora diverge anche $\sum^{+\infty} b_n$, e se $\sum^{+\infty} b_n$ converge, converge anche $\sum^{+\infty} a_n$;

-se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, quando $\sum^{+\infty} a_n$ converge, converge pure $\sum^{+\infty} b_n$, e se $\sum^{+\infty} b_n$ diverge, diverge pure $\sum^{+\infty} a_n$.

Dimostrazione: Vediamo anzitutto il caso in cui $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \mathcal{L}$, finito e diverso da zero.

Dalla definizione di limite, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $n(\varepsilon)$ tale che $\forall\, n > n(\varepsilon)$ risulta: $\left|\dfrac{a_n}{b_n} - \mathcal{L}\right| < \varepsilon$, ovvero: $\mathcal{L} - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < \mathcal{L} + \varepsilon$. Preso $n(\varepsilon) > n_0$, essendo $b_n > 0$, avremo anche: $b_n\,(\mathcal{L} - \varepsilon) < a_n < b_n\,(\mathcal{L} + \varepsilon)$.

Per la $b_n\,(\mathcal{L} - \varepsilon) < a_n$ si ha che $\sum^{+\infty} a_n$ è maggiorante di $\sum^{+\infty} b_n\,(\mathcal{L} - \varepsilon)$ ovvero di $(\mathcal{L} - \varepsilon) \cdot \sum^{+\infty} b_n$; per il Criterio del confronto, se $\sum^{+\infty} a_n$ converge, converge $\sum^{+\infty} b_n\,(\mathcal{L} - \varepsilon)$ e quindi converge anche $\sum^{+\infty} b_n$, mentre se $\sum^{+\infty} b_n$ diverge, diverge pure $\sum^{+\infty} b_n\,(\mathcal{L} - \varepsilon)$ e quindi diverge $\sum^{+\infty} a_n$.

Per la $a_n < b_n(\mathcal{L}+\varepsilon)$ si ha che $\sum^{+\infty} a_n$ è minorante di $\sum^{+\infty} b_n(\mathcal{L}+\varepsilon)$ ovvero di $(\mathcal{L}+\varepsilon)\cdot\sum^{+\infty} b_n$; allora, se $\sum^{+\infty} a_n$ diverge, diverge $\sum^{+\infty} b_n(\mathcal{L}+\varepsilon)$ e quindi diverge $\sum^{+\infty} b_n$; se $\sum^{+\infty} b_n$ converge, converge $\sum^{+\infty} b_n(\mathcal{L}+\varepsilon)$ e quindi converge $\sum^{+\infty} a_n$.
Le due Serie quindi hanno sempre lo stesso carattere.
Vediamo il caso in cui $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=0$.

Per la definizione di limite, scelto $\varepsilon>0$ esiste $n(\varepsilon)$ tale che $\forall\, n>n(\varepsilon)$ si ha: $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon$, ovvero $\dfrac{a_n}{b_n}<\varepsilon$, e quindi: $0<a_n<\varepsilon\, b_n$.

Da queste disequazioni si può solo dedurre che $\sum^{+\infty} a_n$ è minorante di $\sum^{+\infty}\varepsilon\, b_n$.

Per il Criterio del confronto, ragionando come nel caso precedente, se $\sum^{+\infty} a_n$ diverge, allora diverge $\sum^{+\infty}\varepsilon\, b_n$ e quindi diverge $\sum^{+\infty} b_n$, mentre se $\sum^{+\infty} b_n$ converge, allora converge anche $\sum^{+\infty}\varepsilon\, b_n$ e quindi converge $\sum^{+\infty} a_n$.
Quando poi $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=+\infty$, scelto $\mathrm{M}>0$, esiste $n(\mathrm{M})$ tale che $\forall\, n>n(\mathrm{M})$ si ha $\dfrac{a_n}{b_n}>\mathrm{M}$, da cui $a_n>\mathrm{M}\, b_n$, e da questa possiamo dedurre che la convergenza della Serie $\sum^{+\infty} a_n$ implica la convergenza della $\sum^{+\infty} b_n$, mentre la divergenza della Serie $\sum^{+\infty} b_n$ implica la divergenza di $\sum^{+\infty} a_n$.•

Esempio 37 : Determiniamo il carattere della Serie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+5n+7}$.
Il termine generale è un quoziente di polinomi, la cui differenza dei gradi è pari a -1. Mediante il Criterio del confronto asintotico valutiamo il termine generale della Serie data rapportandolo con $n^{-1}=\dfrac{1}{n}$, termine generale della Serie armonica.

Si avrà: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\dfrac{4n-1}{n^2+5n+7}}{\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-n}{n^2+5n+7}=4$, valore finito e diverso da zero. La Serie data e la Serie armonica hanno quindi lo stesso carattere, per cui $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{4n-1}{n^2+5n+7}$ è divergente.

Teorema 28 (Criterio del Rapporto) : Data la Serie $\sum^{+\infty} a_n$, sia $a_n>0$, $\forall\, n>n_0$.

Se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=k$, allora: $\begin{cases}\text{se } 0\le k<1 & \text{: la Serie è convergente}\\ \text{se } 1<k\le+\infty & \text{: la Serie è divergente}\\ \text{se } k=1 & \text{: il Criterio non fornisce risposta}\end{cases}$.

Dimostrazione: Se $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=k$, $\forall\,\varepsilon>0$ si può determinare un indice $n(\varepsilon)>n_0$ tale

che $\forall\, n \geq n(\varepsilon)$ risulta $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n} - k\right| < \varepsilon$, ovvero $k - \varepsilon < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < k + \varepsilon$.
Da questa otteniamo: $a_n\,(k-\varepsilon) < a_{n+1} < a_n\,(k+\varepsilon)$.
Esaminiamo il caso $k < 1$, e scegliamo ε in modo che sia $\delta = k + \varepsilon < 1$. Avremo:
$a_{n(\varepsilon)+1} < \delta \cdot a_{n(\varepsilon)}$;
$a_{n(\varepsilon)+2} < \delta\, a_{n(\varepsilon)+1} < \delta^2\, a_{n(\varepsilon)}$,
ed iterando questa procedura otteniamo, $\forall\, n > n(\varepsilon)$:
$a_n < \delta\, a_{n-1} < \delta^2\, a_{n-2} < ... < \delta^{n-n(\varepsilon)}\, a_{n(\varepsilon)}$,
ovvero la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è una minorante della $\sum^{+\infty} \delta^{n-n(\varepsilon)}\, a_{n(\varepsilon)} = \dfrac{a_{n(\varepsilon)}}{\delta^{n(\varepsilon)}} \cdot \sum^{+\infty} \delta^n$, che è convergente in quanto Serie geometrica di ragione $\delta < 1$; dal Criterio del confronto segue la tesi.
Con analoga procedura si dimostra che se $k = 0$ la Serie è convergente.
Sia poi $k > 1$. Analogamente con la disequazione di sinistra, preso ε in modo che sia $\delta = k - \varepsilon > 1$, otterremo che la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è maggiorante della Serie $\dfrac{a_{n(\varepsilon)}}{\delta^{n(\varepsilon)}} \cdot \sum^{+\infty} \delta^n$, che è divergente in quanto Serie geometrica di ragione $\delta > 1$, per cui anche $\sum^{+\infty} a_n$ è divergente.
Con analoga procedura si dimostra che per $k = +\infty$ la Serie è divergente.●

Si possono trovare infine sia Serie convergenti che Serie divergenti per le quali, applicando il Criterio del rapporto, otteniamo un limite $k = 1$. Ecco il motivo per cui, in questo caso, il Criterio non fornisce risposta.

Esempio 38 : Studiamo, con il criterio del Rapporto, la Serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\,!}{n^n}$.
Si ha: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n\,!} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot n\,!\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n \cdot n\,!} =$
$\displaystyle = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1,$
e quindi la Serie converge.

Si può enunciare il Criterio del rapporto anche in quest'altra forma:
"Se almeno da un certo indice n_0 in poi si ha che $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < k < 1$, allora la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è convergente".

Teorema 29 (Criterio della Radice) : Data la Serie $\sum^{+\infty} a_n$, sia $a_n \geq 0, \forall\, n > n_0$.
Se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = k$, allora: $\begin{cases} \text{se } 0 \leq k < 1 & \text{: la Serie è convergente} \\ \text{se } 1 < k \leq +\infty & \text{: la Serie è divergente} \\ \text{se } k = 1 & \text{: il Criterio non fornisce risposta} \end{cases}$.
Dimostrazione: Scelto $\varepsilon > 0$, per la definizione di limite, $\forall\, n > n(\varepsilon)$ sarà:
$\left|\sqrt[n]{a_n} - k\right| < \varepsilon$, da cui: $(k-\varepsilon)^n < a_n < (k+\varepsilon)^n$.

Nel caso $k < 1$, scelto ε in modo che sia $\delta = k + \varepsilon < 1$, otteniamo dalla disequazione di destra: $a_n < \delta^n$, termine generale di una Serie geometrica di ragione $\delta < 1$, quindi convergente, e per il Criterio del confronto anche $\sum^{+\infty} a_n$ è convergente.
Con analoga procedura si dimostra che se $k = 0$ la Serie è convergente.
Se $k > 1$, scelto ε in modo che sia $\delta = k - \varepsilon > 1$, avremo, usando la disequazione di sinistra, $a_n > \delta^n$, termine generale di una Serie geometrica divergente in quanto con ragione $\delta > 1$, ed allora $\sum^{+\infty} a_n$ risulta, per il Criterio del confronto, divergente.
Con analoga procedura si dimostra che per $k = +\infty$ la Serie è divergente.●

Esempio 39 : Vediamo per quali valori di k risulta convergente la Serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1}\left(\frac{k-1}{k-2}\right)^n$.

Dato che $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n+1}\left(\frac{k-1}{k-2}\right)^n = 3\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left[3\left(\frac{k-1}{k-2}\right)\right]^n$, la Serie si può considerare una Serie geometrica di ragione $3\left(\frac{k-1}{k-2}\right)$, che sarà convergente se $-1 < 3\left(\frac{k-1}{k-2}\right) < 1$.
Questo è vero per $\frac{1}{2} < k < \frac{5}{4}$, e per questi valori di k la Somma della Serie è la funzione:

$$\mathrm{S}(k) = 3\cdot\frac{1}{1-3\left(\frac{k-1}{k-2}\right)} = \frac{3\,(k-2)}{1-2k}.$$

Esempio 40 : Determinare per quali valori di k converge la Serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3n+1}{(k-1)^n}$.

Applichiamo il Criterio del rapporto al termine generale della Serie preso in valore assoluto, ed avremo: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{3n+4}{(k-1)^{n+1}}\cdot\frac{(k-1)^n}{3n+1}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+4}{3n+1}\cdot\frac{1}{|k-1|} = \frac{1}{|k-1|}$;
quindi la Serie è convergente per $\frac{1}{|k-1|} < 1$, ovvero per $k < 0$ e per $k > 2$.
Per $k = 0$ abbiamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\cdot(3n+1)$, Serie che diverge oscillando, mentre per $k = 2$ si ha $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)$, Serie divergente.

Anche il Criterio della radice può essere riformulato dicendo che:
"Se, almeno da un certo indice n_0 in poi, si ha che $\sqrt[n]{a_n} < k < 1$, allora $\sum^{+\infty} a_n$ è convergente".

Per il Teorema 18, sappiamo che se esiste $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$, allora esiste ed ha lo stesso valore anche il $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$, mentre non è vero il viceversa. Il Criterio della radice è quindi di portata più generale di quello del rapporto.

Utilizzando, invece del limite, il massimo limite, avremo :

Teorema 30 (Criterio del Rapporto 2^ forma) : Data la Serie $\sum^{+\infty} a_n$, sia, $\forall\, n > n_0$, $a_n > 0$, e sia $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Allora si ha che:
se $k < 1$ la Serie è convergente;
se $k \geq 1$ il Criterio non fornisce risposta.

Ed avremo anche il:

Teorema 31 (Criterio della Radice 2^ forma) : Data la Serie $\sum^{+\infty} a_n$, sia, $\forall\, n > n_0$, $a_n \geq 0$, e sia $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Allora si ha che:
se $k < 1$ la Serie è convergente;
se $k > 1$ la Serie è divergente;
se $k = 1$ il Criterio non fornisce risposta.

Esempio 41 : Determiniamo il carattere della Serie : $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + ...$

Il termine generale di questa Serie è dato da:

$$a_n = \begin{cases} a_{2k} = \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} & n \text{ pari, } n = 2k \\ a_{2k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1} & n \text{ dispari, } n = 2k+1 \end{cases}.$$

I termini sono tutti positivi ed inoltre $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = 0$.

Applicando il Criterio del rapporto, avremo che:
se l'indice è pari $(2n)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\right)^{2n} = 0,$$

mentre se l'indice è dispari $(2n+1)$:

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right)^{2n+1} = +\infty$$

e quindi non esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Se usiamo invece il Criterio della Radice, avremo:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{3}{4} & n \text{ pari} \\ \frac{1}{2} & n \text{ dispari} \end{cases}.$$

Non esiste quindi neppure $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

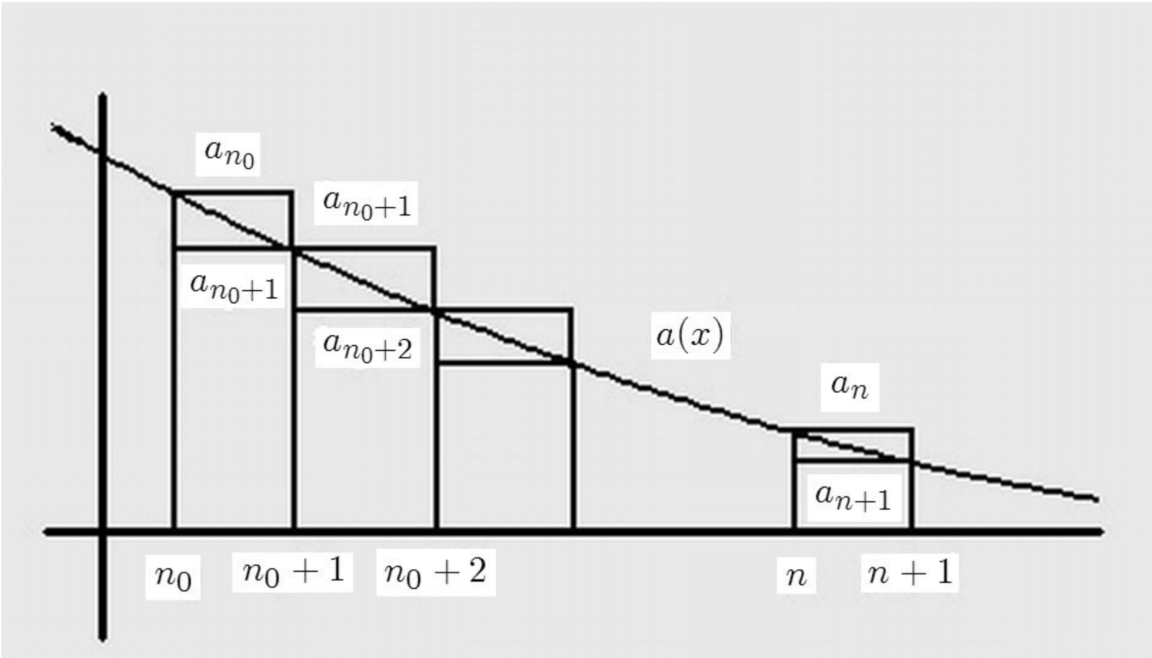
Se calcoliamo $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, avremo che $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, quindi nessuna risposta, mentre si ha che $\operatorname{Max}\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \dfrac{3}{4}$, e quindi la Serie è convergente.
Si può comunque dimostrare la convergenza della Serie anche mediante il Criterio del confronto, osservando che $a_n < \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, sia per n pari che per n dispari.

Vediamo infine altri due criteri per la convergenza delle Serie a termini positivi, che ci limitiamo ad enunciare senza darne dimostrazione:
Teorema 32 (Criterio di Cauchy o della Successione decrescente) : Sia a_n una Successione a termini positivi monotòna decrescente. Allora le due Serie:
$\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2^n \cdot a_{2^n} = a_1 + 2\,a_2 + 4\,a_4 + 8\,a_8 + ...$
hanno lo stesso carattere, ovvero convergono entrambe o divergono entrambe.

Esempio 42 : Determiniamo, al variare di α, il carattere delle Serie: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.
Osserviamo anzitutto che deve essere $\alpha > 0$, affinchè sia soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$,.
Applichiamo il Criterio di Cauchy, potendosi facilmente verificare che i termini $a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ sono positivi e formano una Successione monotòna decrescente.
Avranno quindi lo stesso carattere le due Serie:
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ e $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \dfrac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^{n-n\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(2^{1-\alpha}\right)^n$.
Quest'ultima è una Serie geometrica di ragione $2^{1-\alpha}$, valore minore di 1 se $1-\alpha < 0$, ovvero per $\alpha > 1$.
Quindi la Serie $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$, detta armonica generalizzata, converge se $\alpha > 1$, e diverge se $\alpha \leq 1$.
Vediamo infine un ultimo criterio, molto importante non solamente per il suo uso pratico ma soprattutto per il legame che stabilisce tra le Serie numeriche e gli integrali generalizzati di I^ specie, ovvero tra "somme infinite nel discreto" e "somme infinite nel continuo".

Teorema 33 (Criterio del confronto con l'Integrale) : Sia $y = a(x)$ una funzione reale positiva e decrescente, definita $\forall\, x \geq n_0 \in \mathbb{N}$. Sia $a_n = a(n)$ la Successione ottenuta mediante la restrizione di $a(x)$ ai soli valori naturali. Allora la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ e l'integrale generalizzato di prima specie $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x$ hanno lo steeso carattere, ovvero convergono entrambi o divergono entrambi positivamente.
Dimostrazione: Dalla decrescenza della funzione $y = a(x)$ segue anzitutto la decrescenza della Successione a_n. Inoltre da $n \leq x \leq n+1$ segue $a_{n+1} \leq a(x) \leq a_n$.
A questo punto basta osservare, per la proprietà di isotonia dell'integrale, che:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_{n+1} \le \int_{n_0}^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \,.$$



Il primo ed il terzo termine sono due Serie numeriche, ma sono anche due integrali generalizzati di I^ specie, aventi per funzioni integrande due funzioni a scala, a valori rispettivamente a_{n+1} e a_n. Applicando il Criterio del confronto segue la tesi.●

E' bene comunque notare come non ci sia, in caso di convergenza, uguaglianza tra il valore dell'integrale e la Somma della Serie. Detta S la somma della Serie, vale comunque la seguente disequazione: $\mathrm{S} - a_{n_0} \le \int_{n_0}^{+\infty} a(x)\,\mathrm{d}x \le \mathrm{S}$.

Esempio 43 : Determiniamo, usando il Criterio del Confronto con l'integrale, al variare di α, il carattere delle Serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, dette Serie armoniche generalizzate.

Osserviamo anzitutto che deve essere $\alpha > 0$, affinchè sia $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, condizione necessaria per la convergenza, così come sono soddisfatte le ipotesi, essendo le funzioni $y = \frac{1}{x^\alpha}$ continue, positive e decrescenti $\forall\, x \ge 0$.

Preso $n_0 = 1$, avremo:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty} \int_1^m \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to+\infty} \left(\left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^m \right) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \lim_{m\to+\infty} \left(m^{1-\alpha} - 1 \right).$$

Ora $\lim_{m\to+\infty} m^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1-\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } 1-\alpha > 0 \Rightarrow \alpha < 1 \end{cases}$, per cui l'integrale e quindi la Serie convergono se $\alpha > 1$, mentre l'integrale e la Serie divergono se $\alpha < 1$.

Se $\alpha = 1$ abbiamo la Serie armonica, che sappiamo essere divergente.

Quindi la Serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, armonica generalizzata, converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha \le 1$.

RIORDINAMENTO DEI TERMINI DI UNA SERIE
Non valgono, in generale, per le Serie le proprietà associativa e commutativa che invece valgono per la somma di un numero finito di addendi.

Esempio 44 : Data la Serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot (n+1) = 1-2+3-4+5-6\ +\ ...$, associando i suoi termini in due modi diversi, avremo:
$(1-2)+(3-4)+(5-6)+... = -1-1-1-1-...$, Serie divergente negativamente;
$1-(2-3)-(4-5)-(6-7)-... = 1+1+1+...$, Serie divergente positivamente,
ovvero due conclusioni inconciliabili tra loro.
L'errore consiste nell'aver applicato alla Serie la proprietà associativa, che per le Serie, in generale, invece non vale. Se poi calcoliamo le Ridotte di questa Serie, avremo:
$s_0 = 1,\ s_1 = -1,\ s_2 = 2,\ s_3 = -2,\ s_4 = 3,\ s_5 = -3, ...$
ovvero le Ridotte diventano in quantità sempre più grandi ma con segno alterno, e quindi la Serie diverge oscillando.

Diremo che la Serie $\sum^{+\infty} b_n$ è un riordinamento della Serie $\sum^{+\infty} a_n$ se esiste un'applicazione biunivoca $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $b_n = a_{\psi(n)}$.
Vale il seguente:

Teorema 34 : (di Riemann-Dini): Se la Serie $\sum^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, con somma S, qualunque suo riordinamento genera una Serie convergente con la stessa somma S. Se invece una Serie è convergente semplicemente ma non assolutamente, si possono riordinare i suoi termini in modo da costruire Serie che convergano ad una diversa somma, che siano divergenti od anche indeterminate.