UNIVERSITÀ
DI SIENA
1240

Prof. Lonzi Marco

Dispense per il Corso Propedeutico di MATEMATICA GENERALE

AA. 2023/24

INSIEMISTICA

INSIEMI

Il concetto di **insieme** viene assunto come primitivo, ovvero come già noto in base alla comune esperienza. Un insieme è costituito dai suoi **elementi**. Un insieme è dato quando sono noti i suoi elementi, ovvero gli elementi che gli appartengono.
Denotiamo un generico insieme con una lettera maiuscola, ad esempio $\mathbb{A}$, ed il generico elemento con a. Scriveremo $a \in \mathbb{A}$ (oppure $\mathbb{A} \ni a$) per indicare che l'elemento a appartiene all'insieme $\mathbb{A}$, scriveremo $a \notin \mathbb{A}$ per indicare che l'elemento a non appartiene all'insieme $\mathbb{A}$.
Un insieme può essere dato mediante descrizione per esteso dei suoi elementi, ad esempio:
$\mathbb{A} = \{a, b, c, d\}$ o anche $\mathbb{A} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$
oppure mediante una proprietà $\mathcal{P}(x)$ a cui soddisfano i suoi elementi, scrivendo:
$\mathbb{A} = \{x : \mathcal{P}(x)\}$, ad esempio: $\mathbb{A} = \{x : x \text{ è un numero pari}\}$ o $\mathbb{B} = \{x : x \text{ è italiano}\}$.
Notiamo, ad esempio, che scrivendo $\{a, b, c, d\}$ oppure $\{b, d, c, a\}$ abbiamo lo stesso insieme; per descrivere un insieme non conta quindi l'ordine di elencazione degli elementi.
Non ha senso infine una scrittura del tipo $\mathbb{A} = \{a, a, b, c\}$, ovvero uno stesso elemento a non può appartenere più di una volta all'insieme.

SOTTOINSIEMI E RELAZIONE DI INCLUSIONE

Dati due insiemi qualunque $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$, diamo la seguente:
Definizione 1 : si dice che $\mathbb{A}$ è contenuto in $\mathbb{B}$, oppure che $\mathbb{A}$ è **sottoinsieme** di $\mathbb{B}$, e si scrive $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$, quando ogni elemento di $\mathbb{A}$ appartiene anche a $\mathbb{B}$.
Definiamo formalmente l'**uguaglianza** tra due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ nel seguente modo:
$(\mathbb{A} = \mathbb{B})$ se e solo se $((\mathbb{A} \subset \mathbb{B})$ **e** $(\mathbb{B} \subset \mathbb{A}))$.
La scrittura $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{B}$ significa che $\mathbb{A}$ è contenuto in $\mathbb{B}$, potendo anche i due insiemi coincidere.
Dicesi **insieme vuoto**, denotato con $\emptyset$, l'insieme privo di elementi.
Per la definizione di sottoinsieme, avremo che $\emptyset \subset \mathbb{A}, \forall \mathbb{A}$.
B. Russell ha dimostrato che non può esistere un insieme che contenga ogni altro insieme, ovvero un insieme universo a cui tutto appartiene.
Quando occorre, possiamo però fissare un **insieme universo** (relativo), opportunamente scelto, per limitare opportunamente l'ambito del problema. Indicheremo con $\mathbb{U}$ tale insieme universo. Naturalmente segue che $\mathbb{A} \subset \mathbb{U}, \forall \mathbb{A}$.

INSIEME DELLE PARTI

Dato un insieme $\mathbb{A}$ si definisce l'**insieme delle parti** di $\mathbb{A}$, e si indica con $\mathbb{P}(\mathbb{A})$, l'insieme:
$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \{\mathbb{B} : \mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}\}$, ovvero l'insieme avente per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{A}$.
Dato che $\emptyset \subset \mathbb{A}$ e che $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$, ne segue che $\emptyset \in \mathbb{P}(\mathbb{A})$ e $\mathbb{A} \in \mathbb{P}(\mathbb{A}), \forall \mathbb{A}$.

Esempio 1 : Sia $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$; si vede allora che:
$\mathbb{P}(\mathbb{A}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

OPERAZIONI SUGLI INSIEMI

Dato un insieme $\mathbb{A}$ e dato un insieme (universo) $\mathbb{U}$, abbiamo la:
Definizione 2 : Dicesi **complementare** di $\mathbb{A}$ (rispetto ad $\mathbb{U}$), e si indica con $\mathcal{C}(\mathbb{A})$ (o con $\mathbb{A}'$), l'insieme: $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{x : x \notin \mathbb{A}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{U}$ che non appartengono ad $\mathbb{A}$.

Esempio 2 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; allora $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{4, 5\}$.
Se fosse stato $\mathbb{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ avremmo $\mathcal{C}(\mathbb{A}) = \{4, 5, 6, 7\}$.

Vediamo ora operazioni insiemistiche che operano su almeno due insiemi. Diamo la
Definizione 3 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **intersezione**, indicata con $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, l'insieme:
$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \in \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi che appartengono sia ad $\mathbb{A}$ che a $\mathbb{B}$.

Esempio 3 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{1, 2, 4, 5\}$; allora $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{1, 2\}$.
Se invece $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{4, 5\}$ avremo allora $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \emptyset$.

Con $\bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ indichiamo l'intersezione di un numero generico n di insiemi : $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, ..., \mathbb{A}_n$.
Un elemento $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ se x appartiene a ciascuno degli $\mathbb{A}_i$.

Definizione 4 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **unione**, indicata con $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$, l'insieme:
$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ o } x \in \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi che appartengono ad $\mathbb{A}$ oppure che appartengono a $\mathbb{B}$, oppure ad ambedue.

Esempio 4 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{1, 2, 4, 5\}$; allora $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Come si vede, gli elementi 1 e 2, che appartengono sia ad $\mathbb{A}$ che a $\mathbb{B}$, compaiono una sola volta in $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$.

Con $\bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ indichiamo l'unione di un numero generico n di insiemi : $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2, ..., \mathbb{A}_n$.
Un elemento $x \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathbb{A}_i$ se x appartiene ad almeno uno degli $\mathbb{A}_i$.

Definizione 5 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **differenza**, e si indica con $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$, l'insieme:
$\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{x : x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \notin \mathbb{B}\}$, ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{A}$ che non appartengono a $\mathbb{B}$.

Esempio 5 : Siano $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{1, 2, 4, 5\}$; allora si ha che $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B} = \{3\}$ mentre invece $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A} = \{4, 5\}$.

Notiamo come gli insiemi $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$, $\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}$ costituiscono una partizione di $\mathbb{A} \cup \mathbb{B}$. Essi infatti non hanno elementi in comune ed inoltre: $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = (\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \cup (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A})$.

Definizione 6 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **differenza simmetrica**, e si indica con $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = \{x : (x \in \mathbb{A} \textbf{ e } x \notin \mathbb{B}) \textbf{ o } (x \notin \mathbb{A} \textbf{ e } x \in \mathbb{B})\}$,
ovvero l'insieme costituito dagli elementi di $\mathbb{A}$ che non appartengono a $\mathbb{B}$ e dagli elementi di $\mathbb{B}$ che non appartengono ad $\mathbb{A}$.
Si verifica facilmente che: $\mathbb{A} \triangle \mathbb{B} = (\mathbb{A} \setminus \mathbb{B}) \cup (\mathbb{B} \setminus \mathbb{A}) = (\mathbb{A} \cup \mathbb{B}) \setminus (\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$.

TAVOLE DI APPARTENENZA
Possiamo sintetizzare le varie operazioni insiemistiche con le tavole che seguono, avendo denotato con **1** l'appartenenza all'insieme e con **0** la non appartenenza:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\triangle\mathbb{B}$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0

Esempio 6 : Verifichiamo, mediante le tavole di appartenenza, la validità della relazione insiemistica $[\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})]\subset[(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})]$.
Avremo la tavola (costituita da $2^3 = 8$ righe):

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{B}\cup\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\setminus\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$
1	1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Confrontando la 5^ e la 8^ colonna, relative ad $\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$ e ad $(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$, vediamo che la relazione proposta è vera in quanto ogni elemento del primo insieme è anche elemento del secondo; infatti il valore 1 in 4^ posizione nella colonna di $\mathbb{A}\setminus(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})$ trova analogo valore, sulla stessa riga, nella colonna di $(\mathbb{A}\setminus\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\setminus\mathbb{C})$. Essendoci, nella colonna relativa a quest'ultimo, altri due valori 1 (2^ e 3^ posizione), possiamo dedurre che la relazione di sottoinsieme vale in modo stretto.

PROPRIETA' DELLE OPERAZIONI INSIEMISTICHE

Valgono le seguenti proprietà, dove con $\mathbb{U}$ è indicato l'insieme universo scelto:

$\mathbb{A}\cup\mathbb{A}=\mathbb{A}$;	$\mathbb{A}\cap\mathbb{A}=\mathbb{A}$	
$\mathbb{A}\cup\emptyset=\mathbb{A}$;	$\mathbb{A}\cap\emptyset=\emptyset$	
$\mathbb{A}\cup\mathbb{U}=\mathbb{U}$;	$\mathbb{A}\cap\mathbb{U}=\mathbb{A}$	
$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}=\mathbb{B}\cup\mathbb{A}$;	$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}=\mathbb{B}\cap\mathbb{A}$	proprietà commutativa
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\mathbb{A}$;	$\mathbb{A}\cap(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\mathbb{A}$	proprietà di assorbimento
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\cup\mathbb{C}$		proprietà associativa
$\mathbb{A}\cap(\mathbb{B}\cap\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})\cap\mathbb{C}$		proprietà associativa
$\mathbb{A}\cup(\mathbb{B}\cap\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})\cap(\mathbb{A}\cup\mathbb{C})$		proprietà distributiva
$\mathbb{A}\cap(\mathbb{B}\cup\mathbb{C})=(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})\cup(\mathbb{A}\cap\mathbb{C})$		proprietà distributiva
$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})=\mathcal{C}(\mathbb{A})\cap\mathcal{C}(\mathbb{B})$		I^ legge di De Morgan.
$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})=\mathcal{C}(\mathbb{A})\cup\mathcal{C}(\mathbb{B})$		II^ legge di De Morgan.

Esempio 7 : Verifichiamo la validità della I^ legge di De Morgan:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})\cap\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cup\mathbb{B})$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1

L'uguaglianza della 5^ e 7^ colonna verifica la proprietà.
Verifichiamo anche la validità della II^ legge di De Morgan:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})$	$\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathcal{C}(\mathbb{A})\cup\mathcal{C}(\mathbb{B})$	$\mathbb{A}\cap\mathbb{B}$	$\mathcal{C}(\mathbb{A}\cap\mathbb{B})$
1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1

L'uguaglianza della 5^ e 7^ colonna verifica la proprietà.

PRODOTTO CARTESIANO DI INSIEMI

Definizione 7 : Dati due insiemi $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ si dice **prodotto cartesiano**, e si indica con $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$, l'insieme: $\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\{(a,b) : a\in\mathbb{A}, b\in\mathbb{B}\}$.
Il prodotto cartesiano $\mathbb{A}\times\mathbb{B}$ è l'insieme costituito da tutte le possibili coppie aventi per primo elemento un qualunque elemento di $\mathbb{A}$ e per secondo elemento un qualunque elemento di $\mathbb{B}$.
La coppia (a,b) costituisce un elemento la cui natura è diversa sia da quella di a che da quella di b, ed è bene notare come non vi sia, nella coppia (a,b), alcuna operazione da eseguirsi tra a e b.
Vista la definizione, in genere si ha che $\mathbb{A}\times\mathbb{B}\neq\mathbb{B}\times\mathbb{A}$, e che $\mathbb{A}\times\emptyset=\emptyset$.

Esempio 8 : Siano $\mathbb{A}=\{1,2,3\}$ e $\mathbb{B}=\{a,b\}$. Avremo allora:
$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$. Mentre invece:
$\mathbb{B}\times\mathbb{A}=\{(a,1),(b,1),(a,2),(b,2),(a,3),(b,3)\}$.
Esempio 9 : Siano $\mathbb{A}=\{1,\,-1\}$ e $\mathbb{B}=\{1,\,-1\}$. Avremo allora:
$\mathbb{A}\times\mathbb{B}=\{(1,1),(1,\,-1),(\,-1,1),(\,-1,\,-1)\}=\mathbb{B}\times\mathbb{A}$.

Analogamente, dati n insiemi $\mathbb{A}_i$, $1\leq i\leq n$, si definisce il loro prodotto cartesiano come:
$\mathbb{A}_1\times\mathbb{A}_2\times\ldots\times\mathbb{A}_n=\{(a_1,a_2,\ldots,a_n) : a_i\in\mathbb{A}_i, 1\leq i\leq n\}$
cioè l'insieme costituito da tutte le possibili n-**uple** aventi per elemento di posto i-esimo un qualunque elemento dell'insieme i-esimo $\mathbb{A}_i$.
Ove fosse $\mathbb{A}_i=\mathbb{A}, \forall i : 1\leq i\leq n$, scriveremo anche $\mathbb{A}\times\mathbb{A}\times\ldots\times\mathbb{A}=\mathbb{A}^n$.

NUMERI REALI

Diamo una descrizione essenziale dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali iniziando dai suoi principali sottoinsiemi.

NUMERI NATURALI

Con $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ si indica l'insieme dei **numeri naturali**.
L'insieme $\mathbb{N}$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto, ovvero sommando e moltiplicando numeri naturali si ottiene sempre, come risultato, un numero naturale.

Dato un insieme $\mathbb{A}$, si indica con Card$(\mathbb{A})$ il cosiddetto "cardinale di $\mathbb{A}$", che rappresenta il numero, o la numerosità, degli elementi di $\mathbb{A}$.

Esempio 10 : Se $\mathbb{A} = \{1, 2, 3\}$ e $\mathbb{B} = \{a, b\}$ avremo: $\text{Card}(\mathbb{A}) = 3$ e $\text{Card}(\mathbb{B}) = 2$.

Quando nel corso svilupperemo il concetto di corrispondenza biunivoca, introdurremo le Definizioni di insieme finito e di insieme infinito.
Possiamo comunque già vedere, usando l'insieme $\mathbb{N}$, alcune situazioni apparentemente paradossali. Consideriamo lo schema sottostante:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbb{P}$:	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	...

Come possiamo "empiricamente" vedere, passando da sopra a sotto, ad ogni numero naturale corrispondente un solo numero pari e viceversa, passando da sotto a sopra.
I numeri naturali hanno la stessa numerosità dei numeri pari, ovvero $\text{Card}(\mathbb{N}) = \text{Card}(\mathbb{P})$.
Similmente:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbb{QP}$:	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	...

che ci mostra come i numeri naturali e l'insieme dei quadrati perfetti abbiano anch'essi la stessa numerosità. E potremmo continuare con molti altri esempi ancora ...
Questi concetti verranno opportunamente formalizzati nel corso con le Definizioni di insieme infinito e di insieme numerabile.

Vale infine la seguente:
Definizione 8 : Dato un numero naturale n, si dice **fattoriale** di n, e si indica con $n\,!$, il prodotto di tutti i numeri naturali decrescenti da n a 1.
Ovvero: $n\,! = n\,(n-1)\,(n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
Sempre per definizione si pone poi: $0\,! = 1$.
Vale la proprietà: $n\,! = n\,(n-1)\,!$.

Se si vuole escludere il solo valore 0 dall'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali si usa, al posto di $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, la seguente notazione: $\mathbb{N}^*$, che sarà poi usata anche per gli altri insiemi numerici.

NUMERI INTERI
Si indica con $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ..., n, -n, ...\}$ l'insieme dei **numeri interi**, costituito dai numeri naturali n e dai loro opposti $-n$. Quindi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. L'insieme $\mathbb{Z}$ è chiuso rispetto alla somma, al prodotto e alla differenza, ovvero sommando, moltiplicando e sottraendo numeri interi si ottiene sempre, come risultato, un numero intero.
Anche ora:

$\mathbb{N}$:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$\mathbb{Z}$:	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	...

che ci mostra come i numeri naturali e l'insieme degli interi abbiano la stessa numerosità.
Si può anche esprimere questa corrispondenza con una formula matematica (in realtà si tratta di una funzione):

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ n\to f(n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{per } n \text{ dispari}\\ -\dfrac{n}{2} & \text{per } n \text{ pari}\end{cases}$, per andare da sopra a sotto, mentre

$f^{-1}:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ z\to f^{-1}(z)=\begin{cases}2z-1 & \text{per } z \text{ positivo}\\ -2z & \text{per } z \text{ negativo}\end{cases}$ per andare da sotto a sopra.

Quindi $\mathrm{Card}(\mathbb{Z})=\mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

NUMERI RAZIONALI

Consideriamo l'insieme $\overline{\mathbb{Q}}=\left\{\dfrac{m}{n}:m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^*\right\}$, ovvero l'insieme costituito da tutte le possibili frazioni aventi a numeratore e a denominatore numeri interi, ovviamente con denominatore diverso da zero. Sugli elementi di tale insieme operiamo, quando possibile, la semplificazione degli eventuali sottomultipli comuni.

L'insieme $\mathbb{Q}$ è l'insieme dei **numeri razionali**, ovvero dei numeri che si possono scrivere sotto forma di frazione $\dfrac{m}{n}$, con m e n numeri primi tra loro, ovvero privi di qualsiasi sottomultiplo comune (eccetto 1 ovviamente):

$\mathbb{Q}=\left\{\dfrac{m}{n}:m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^*,\ m \text{ e } n \text{ primi tra loro}\right\}$.

E' facile vedere che $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

L'insieme $\mathbb{Q}$ risulta chiuso rispetto a tutte e quattro le operazioni dell'aritmetica: somma, prodotto, differenza e divisione.

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un insieme numerabile, e quindi $\mathrm{Card}(\mathbb{Q})=\mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

La dimostrazione della numerabilità di $\mathbb{Q}$ è basata su di una procedura, detta diagonale o a scacchiera, che qui non viene descritta.

La notazione frazionaria sottintende, come noto, alla divisione $m:n$ tra due numeri interi.

Eseguendo tale divisione, ovvero mettendo il numero razionale in forma decimale, due sono i tipi di risultato possibili: o si ottiene un numero decimale finito, e questo accade quando il resto della divisione è zero, oppure si ottiene un numero decimale periodico, e questo accade quando non si incontra mai un resto pari a zero, per cui si ritrova, prima o poi, uno dei resti già incontrati. Possiamo unificare tutto questo dicendo che ogni numero razionale, messo in forma decimale, dà per risultato un numero periodico, di periodo zero (i decimali finiti) o di periodo diverso da zero (i decimali periodici veri e propri).

Presi due numeri razionali $\dfrac{m_1}{n_1}$ e $\dfrac{m_2}{n_2}$, la loro media aritmetica $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}\right)$ è ancora un numero razionale, e risulta $\dfrac{m_1}{n_1}<\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m_1}{n_1}+\dfrac{m_2}{n_2}\right)<\dfrac{m_2}{n_2}$. Quindi tra due numeri razionali c'è sempre almeno un altro numero razionale, e quindi, come conseguenza, infiniti numeri razionali. Per questo motivo l'insieme $\mathbb{Q}$ è detto **denso**.

Questa proprietà non vale nè in $\mathbb{N}$ nè in $\mathbb{Z}$.

NUMERI REALI

Si consideri un quadrato di lato pari ad 1; come noto dalla geometria, la diagonale di tale quadrato ha allora una lunghezza pari a $\sqrt{2}$. Vediamo che $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, ovvero che non esiste alcuna frazione tale che $\dfrac{m}{n}=\sqrt{2}$.

Supponendo m e n primi tra loro, da $\dfrac{m}{n}=\sqrt{2}$, segue $\dfrac{m^2}{n^2}=2$, ovvero $m^2=2n^2$, da cui si deduce che m^2 è pari, e quindi che m è pari.

Posto $m = 2k$, sostituendo si ha: $4k^2 = 2n^2$, ovvero $n^2 = 2k^2$, e quindi n^2 è pari, per cui anche n è pari.
Ma così abbiamo raggiunto una contraddizione, in quanto sia n che m risulterebbero pari, ovvero multipli di 2, mentre avevamo supposto che fossero primi tra loro.
Quindi $\sqrt{2}$ non è esprimibile sotto forma di frazione, e questo esempio ci mostra che esistono altri numeri oltre ai numeri razionali.
Dato che i razionali, se messi in forma decimale, risultano comunque periodici (se di periodo zero sono decimali finiti), i numeri che non sono razionali non potranno che essere, se messi in forma decimale, numeri non finiti e non periodici, ovvero con infinite cifre dopo la virgola senza alcuna periodicità tra di esse.
Tali numeri, dato che non sono esprimibili sotto forma di frazione (razionali) saranno detti **numeri irrazionali**.
L'insieme risultante dall'unione dei numeri razionali e dei numeri irrazionali prende il nome di insieme dei **numeri reali**, e viene denotato con $\mathbb{R}$. Si ha che $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
Si dimostra, ma qui lo omettiamo, che $\mathbb{R}$ non è numerabile, per cui $\text{Card}(\mathbb{R}) > \text{Card}(\mathbb{N})$.
Dato che ogni numero irrazionale ha infinite cifre dopo la virgola, non periodiche, segue che di esso potremo avere solo una rappresentazione approssimata, potendosi determinare, dopo la virgola, solo un numero finito, per quanto grande, di cifre decimali.
Supponiamo di voler trovare un valore approssimato di $\sqrt{2}$. Dobbiamo utilizzare i numeri razionali, dei quali abbiamo una rappresentazione esatta, e procedere per tentativi.
Se $x = \sqrt{2}$, allora $x^2 = 2$. Essendo $1^2 = 1 < 2$ e $2^2 = 4 > 2$, segue che $1 < \sqrt{2} < 2$.
Passando al primo decimale, si ha: $(1{,}4)^2 < 2$ mentre $(1{,}5)^2 > 2$, da cui $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$.
Essendo $(1{,}41)^2 < 2$ mentre $(1{,}42)^2 > 2$, segue che $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$.
Essendo $(1{,}414)^2 < 2$ mentre $(1{,}415)^2 > 2$, segue che $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$.
Essendo $(1{,}4142)^2 < 2$ mentre $(1{,}4143)^2 > 2$, segue che $1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$.
Chiaramente questa procedura non ha termine, ma consente, una cifra alla volta, di esprimere il numero $\sqrt{2}$ con l'approssimazione desiderata.
Procedendo in questo modo abbiamo costruito due classi nell'ambito dei numeri razionali; abbiamo cioè costruito due successioni: $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che:
$a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n < ... < b_n < ... < b_2 < b_1 < b_0$,
ovvero tali che $b_i > a_j, \forall\, i, j$. Se è soddisfatta la seguente ulteriore proprietà:
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) : (n > n(\varepsilon)) \Rightarrow (b_n - a_n < \varepsilon)$
le due classi si dicono **contigue**, ovvero, se n è abbastanza grande, gli elementi a_n e b_n sono "vicini" quanto vogliamo.

LA RETTA REALE

Consideriamo una retta geometrica r e l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. Si dimostra (qui lo omettiamo) che esiste una corrispondenza biunivoca tra i punti della retta geometrica r ed i numeri reali: ad ogni punto della retta geometrica si può far corrispondere uno ed un solo numero reale e viceversa.
Si viene a stabilire un sistema di riferimento che viene anche detto un sistema di ascisse sulla retta. La retta geometrica, a ciascun punto della quale corrisponde il suo proprio numero reale, prende il nome di **retta reale**.
I punti della retta geometrica ed i numeri reali sono accumunati da una importante proprietà: tra due di essi ce n'è sempre almeno un altro, il che porta a concludere che tra due di essi ce ne sono sempre infiniti altri.
Si usa dire che questi due insiemi hanno la proprietà del continuo.
L'insieme $\mathbb{Q}$ non ha invece la proprietà del continuo, pur essendo un insieme denso, perchè tra due razionali ci sono infiniti altri razionali, ma ci sono anche infiniti irrazionali.

Una importante conseguenza di questa proprietà è costituita dal fatto che per nessun punto della retta geometrica come per nessun numero reale è possibile parlare di elemento precedente e di elemento successivo dell'elemento dato.

IL PIANO CARTESIANO

Dato l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, si consideri il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
In analogia con quanto fatto per la retta reale, stabiliamo in $\mathbb{R}^2$ un sistema di riferimento che risulta dedotto da quello stabilito sulla retta reale $\mathbb{R}$.
Considerato un piano geometrico, ogni coppia di valori reali $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ individua un punto di tale piano e viceversa; il primo elemento della coppia (x, y) prende il nome di **ascissa**, il secondo quello di **ordinata**.
$\mathbb{R}^2$ viene detto **piano reale** o **cartesiano**.

INTERVALLI

Gli intervalli costituiscono la categoria più importante tra i sottoinsiemi della retta reale.
Si definiscono otto tipi di intervallo, che sono i seguenti:
- $[a, b] : \{x : a \leq x \leq b\}$ Intervallo limitato e chiuso
- $]a, b[: \{x : a < x < b\}$ Intervallo limitato e aperto
- $]a, b] : \{x : a < x \leq b\}$ Intervallo limitato nè aperto nè chiuso
- $[a, b[: \{x : a \leq x < b\}$ Intervallo limitato nè aperto nè chiuso
- $]-\infty, b] : \{x : x \leq b\}$ Intervallo illimitato e chiuso
- $]-\infty, b[: \{x : x < b\}$ Intervallo illimitato e aperto
- $[a, +\infty[: \{x : a \leq x\}$ Intervallo illimitato e chiuso
- $]a, +\infty[: \{x : a < x\}$ Intervallo illimitato e aperto.

FUNZIONI ELEMENTARI

Le funzioni elementari costituiscono gli elementi di base per la costruzione delle funzioni reali di variabile reale, che saranno esprimibili operando mediante le operazioni algebriche e la composizione di funzione sulle funzioni elementari stesse.
Solitamente vengono catalogate tra le funzioni elementari le seguenti:
- le funzioni polinomiali e le funzioni razionali fratte;
- le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche;
- le funzioni potenza;
- le funzioni circolari o trigonometriche;
- la funzione valore assoluto e la funzione parte intera.

Iniziamo anticipando informalmente alcune importanti definizioni usate nel seguito.

FUNZIONE

Dati due insiemi $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si dice **funzione** da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{Y}$, e si indica con $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y};\ x \to f(x)$, o con $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}; y = f(x)$, una legge (relazione) che ad ogni elemento x di $\mathbb{X}$ associa uno ed un solo elemento y di $\mathbb{Y}$

CAMPO D'ESISTENZA

Il Campo d'esistenza di una funzione consiste nell'insieme più ampio di valori reali per i quali l'espressione o legge della funzione ha senso ed è calcolabile.

GRAFICO

Si definisce il **grafico** di una funzione come l'insieme:

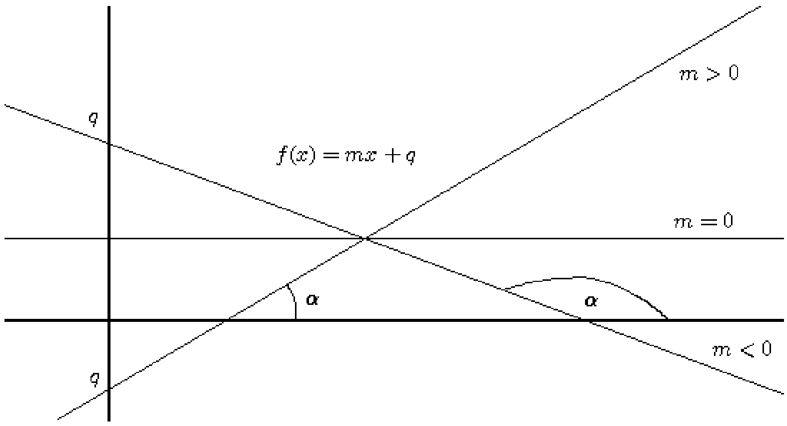
$\mathcal{G}_f = \{(x,y) \in \mathbb{X} \times \mathbb{Y} : y = f(x)\}$.

FUNZIONI PARI O DISPARI
Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y = f(x)$.
La funzione si dice **pari** se $f(x) = f(-x)$.
Le funzioni pari hanno il grafico simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.
La funzione si dice **dispari** se $f(x) = -f(-x)$.
Le funzioni dispari hanno il grafico simmetrico rispetto all'origine degli assi.

FUNZIONI POLINOMIALI

Si definisce polinomio di grado n una espressione del tipo:
$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $x \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$.
Gli esponenti della x devono essere esclusivamente numeri naturali.
Il grado di un polinomio è dato dall'esponente massimo presente nell'espressione.
Diremo **funzione polinomiale** una funzione esprimibile come:
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.
Sono casi degni di particolare nota quelli delle funzioni polinomiali di primo grado, che hanno per grafico una retta, e quelle di secondo grado, che hanno per grafico una parabola. Come caso particolare, se il grado del polinomio è pari a zero, si ha la funzione costante $f(x) = a_0$.

FUNZIONI POLINOMIALI DI PRIMO GRADO : LE RETTE
Consideriamo le funzioni polinomiali di primo grado $f(x) = a_1 x + a_0 = mx + q$.
Il grafico di una tale funzione è sempre costituito da una retta.
Il coefficiente m viene detto **coefficiente angolare**, ed è dato dalla tangente trigonometrica (vedere la successiva parte inerente le funzioni trigonometriche) dell'angolo α che la retta forma con la parte positiva dell'asse delle ascisse: $m = \mathrm{tg}\,\alpha$.
Il coefficiente q viene detto **aggiunta all'origine**.
Se $m = 0$ otteniamo una funzione costante.
Se $q = 0$ otteniamo una retta passante per l'origine.
Le funzioni $f(x) = mx$ esprimono la legge della **proporzionalità diretta**.
Se $m > 0$ la funzione è strettamente crescente, ovvero il suo grafico sale da sinistra verso destra, se $m < 0$ è invece strettamente decrescente.
Due rette risultano **parallele** se hanno lo stesso coefficiente angolare:
$y = mx + q_1$ e $y = mx + q_2$.
Due rette risultano **perpendicolari** se hanno coefficienti angolari che sono uno l'opposto del reciproco dell'altro:
$y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$, con $m_1 \cdot m_2 = -1$, da cui $m_1 = -\dfrac{1}{m_2}$.
La figura seguente illustra l'andamento delle rette al variare di m.



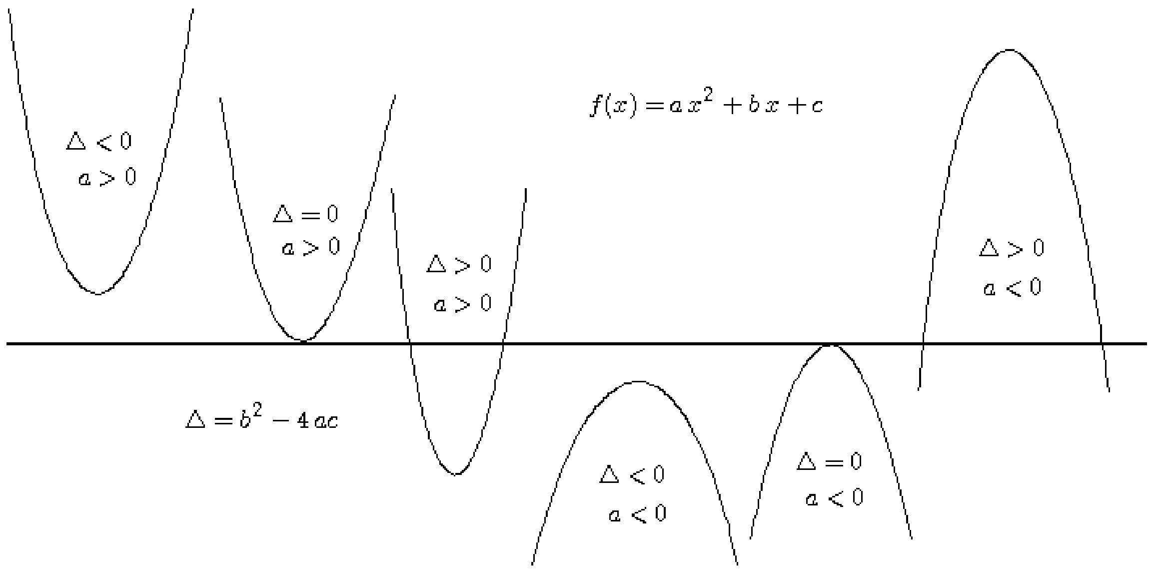
L'equazione di una generica **retta passante per il punto** (x_0, y_0) è data da:
$y - y_0 = m\,(x - x_0)\,,$
restando da determinare poi il coefficiente angolare m, dato che per il punto (x_0, y_0) passano infinite rette.
Risulta chiaramente: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = m\ .$
L'equazione dell'unica **retta passante per i due punti**, (x_1, y_1) e (x_2, y_2) è data da:
$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,,$
da cui otteniamo: $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) = m\,(x - x_1)\,.$
Come si vede il suo coefficiente angolare è dato da $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$
L'**equazione** : $mx + q = 0$ ha una sola soluzione, data da $x = -\dfrac{q}{m}$, che ci fornisce l'ascissa del punto in cui la retta taglia l'asse delle x.
La **disequazione** $mx + q > 0$ è risolta per $x > -\dfrac{q}{m}$ se $m > 0\,;$
La **disequazione** $mx + q > 0$ è risolta per $x < -\dfrac{q}{m}$ se $m < 0\,.$

FUNZIONI POLINOMIALI DI SECONDO GRADO : **LE PARABOLE**
Chiamasi **parabola** il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice.
Ogni funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ha per grafico una parabola.
Viene detto **discriminante** il valore $\triangle = b^2 - 4\,ac\,.$
Il punto di coordinate $\left(-\dfrac{\mathrm{b}}{2a};\ -\dfrac{\triangle}{4a}\right)$ è detto **vertice** della parabola.
Se $a > 0$ la parabola è **convessa** (rivolta verso l'alto);
se $a < 0$ la parabola è **concava** (rivolta verso il basso).
Se $\triangle > 0$ la parabola taglia due volte l'asse delle ascisse;
se $\triangle = 0$ la parabola è tangente all'asse delle ascisse nel vertice (con l'asse delle ascisse ha due intersezioni coincidenti);
se $\triangle < 0$ la parabola non taglia l'asse delle ascisse.

La retta di equazione $x = -\dfrac{b}{2a}$ è un **asse verticale** di simmetria per il grafico della parabola.
Per l'**equazione** polinomiale di II^ grado: $ax^2 + bx + c = 0$, vale la formula risolutiva:

$x = \dfrac{-\,b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, che fornisce le due radici $x_1 = \dfrac{-\,b - \sqrt{\triangle}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-\,b + \sqrt{\triangle}}{2a}$,
dove $\triangle = b^2 - 4\,ac$ è il discriminante dell'equazione.
Se $\triangle > 0$ l'equazione ha due soluzioni reali distinte;
se $\triangle = 0$ l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti (o una soluzione reale doppia);
se $\triangle < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali (ha due soluzioni complesse coniugate).

Nella figura seguente si possono vedere i possibili grafici delle parabole al variare di a e di $\triangle$.



Siano x_1 e x_2 le eventuali soluzioni reali della $ax^2 + bx + c = 0$.

La **disequazione** $ax^2 + bx + c > 0$ è risolta:
-per $\{x : x < x_1\} \cup \{\, x : x > x_2\}$, se $a > 0$ e $\triangle > 0$;
-per $x_1 < x < x_2$, se $a < 0$ e $\triangle > 0$;
-per ogni valore della x eccetto $x = -\dfrac{b}{2a}$ se $a > 0$ e $\triangle = 0$;
-per ogni valore della x se $a > 0$ e $\triangle < 0$;
-per nessun valore della x se $a < 0$ e $\triangle \leq 0$.

La **disequazione** $ax^2 + bx + c \geq 0$ è risolta:
-per $\{x : x \leq x_1\} \cup \{\, x : x \geq x_2\}$, se $a > 0$ e $\triangle > 0$;
-per $x_1 \leq x \leq x_2$, se $a < 0$ e $\triangle > 0$;
-per ogni valore della x se $a > 0$ e $\triangle = 0$;
-per ogni valore della x se $a > 0$ e $\triangle < 0$;
-per nessun valore della x se $a < 0$ e $\triangle < 0$;
-solo per $x = -\dfrac{b}{2a}$ se $a < 0$ e $\triangle = 0$.

FUNZIONI RAZIONALI FRATTE
Si dicono **funzioni razionali fratte** le funzioni espresse come quoziente di due polinomi:
$$f(x) = \frac{a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + ... + a_1\,x + a_0}{b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + ... + b_1\,x + b_0} = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{\mathrm{P}_m(x)}\,.$$
Sono definite in tutto $\mathbb{R}$, tolti quei valori della variabile indipendente x che annullano il denominatore; deve infatti essere $b_m\,x^m + b_{m-1}\,x^{m-1} + ... + b_1\,x + b_0 \neq 0$.

Un caso semplice e importante di funzione razionale fratta è rappresentato dalle funzioni cosiddette **omografiche**, espresse come quozienti di polinomi di I^ grado: $f(x) = \dfrac{a_1\,x + a_0}{b_1\,x + b_0}$, le quali hanno per grafico una **iperbole**; la più semplice tra di esse è la $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

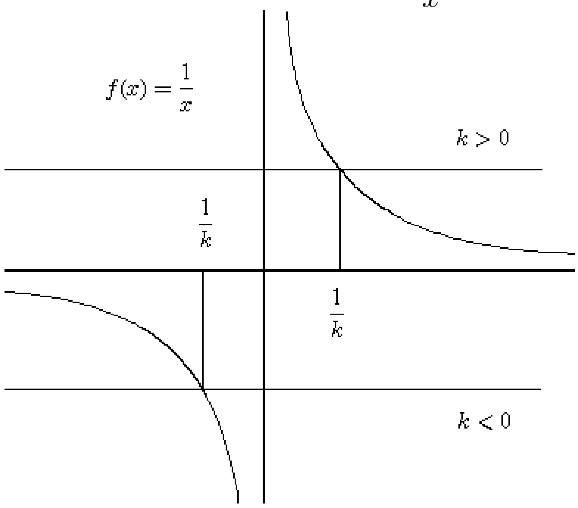
Le funzioni del tipo $y = \dfrac{k}{x}$, ovvero $x\,y = k,\, k \in \mathbb{R}^*$, esprimono la legge della **proporzionalità inversa**.

FUNZIONE RECIPROCO : **L'IPERBOLE**

La funzione **reciproco** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ associa ad ogni numero reale $x \neq 0$ il suo reciproco.

La funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ha un codominio illimitato, è decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, +\infty[$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$ e per asintoto orizzontale la retta $y = 0$.

Il suo grafico rappresenta un caso particolarmente semplice di **iperbole** equilatera, avente per assi gli assi coordinati. Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$ è illustrato nella figura seguente:



L'**equazione** $\dfrac{1}{x} = 0$ non ha soluzioni, l'equazione $\dfrac{1}{x} = k$ ha soluzione $x = \dfrac{1}{k}$.

La **disequazione** $\dfrac{1}{x} > 0$ è risolta per $x > 0$,

la **disequazione** $\dfrac{1}{x} > k$ è risolta per $x : 0 < x < \dfrac{1}{k}$ se $k > 0$;

la **disequazione** $\dfrac{1}{x} > k$ è risolta per $\left\{x :\ -\infty < x < \dfrac{1}{k}\right\} \cup \{x : x > 0\}$ se $k < 0$.

FUNZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

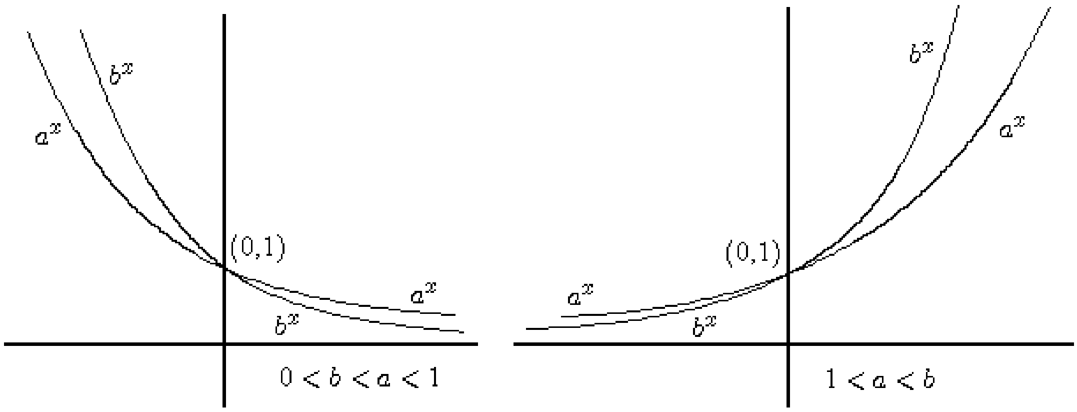
FUNZIONI ESPONENZIALI

Le funzioni esponenziali sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente il ruolo di esponente di una base a costante e positiva. Affinchè l'esponente possa assumere ogni valore reale si impone la restrizione $a > 0$. Non esistono quindi funzioni esponenziali con base $a \leq 0$.

Scrivemo allora $y = f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ per indicare una generica funzione esponenziale.

Le caratteristiche e le proprietà delle funzioni esponenziali variano a seconda della base a, a seconda che sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.
La funzione esponenziale in base $a = 1$ non viene trattata, in quanto si riduce ad una funzione costante, dato che $1^x = 1, \forall\, x$.

FUNZIONI ESPONENZIALI CON BASE $a > 1$
Dato $a > 1$, consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
La funzione esponenziale con base a maggiore di uno è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente dallo 0, è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$, ha per asintoto orizzontale sulla sinistra la retta $y = 0$.
La figura di destra mostra i grafici di due funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, con $1 < a < b$.



FUNZIONI ESPONENZIALI CON BASE $0 < a < 1$
Dato $0 < a < 1$, consideriamo la funzione esponenziale $f(x) = a^x, \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$.
La funzione esponenziale con base a minore di uno è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente dallo 0, è strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$, ha per asintoto orizzontale sulla destra la retta $y = 0$.
La figura di sinistra mostra il grafico di due funzioni esponenziali $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, con $0 < b < a < 1$.

ESPONENZIALI E LOGARITMI
Siano x, y ed a numeri reali, con $y > 0, a > 0, a \neq 1$.
L'uguaglianza in forma esponenziale $y = a^x$ può essere scritta anche come $x = \log_a y$, ovvero in forma logaritmica. Ad esempio, essendo $2^3 = 8$, sarà anche $3 = \log_2 8$.
Nell'espressione a^x, il valore a è detto **base**, il valore x è detto **esponente**.
Nell'espressione $\log_a x$, il valore a è detto **base** del logaritmo, il valore x è detto **argomento** del logaritmo.
Dalle $\begin{cases} x = \log_a y \\ y = a^x \end{cases}$, sostituendo, otteniamo altre due uguaglianze: $\begin{cases} x = \log_a y = \log_a a^x \\ y = a^x = a^{\log_a y} \end{cases}$.
La prima rappresenta un modo rapido di calcolare i logaritmi, allorquando l'argomento risulti esprimibile come una potenza della base.
Esempio 11 : $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$; $\log_2 \dfrac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$; $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt[5]{8}} = \log_2 2^{-\frac{3}{5}} = -\dfrac{3}{5}$.
La seconda permette invece di scrivere un qualunque numero $y > 0$ come una potenza avente per base un qualunque altro numero $a > 0, a \neq 1$.
Esempio 12 : $8 = 2^{\log_2 8}; 5 = 7^{\log_7 5}$.

Di questa seconda uguaglianza sono particolarmente usate le trasformazioni in base e (numero di Nepero: vedere i limiti notevoli) sia di numeri positivi che di funzioni:

$$\begin{cases} \text{se } a > 0 \text{ allora} & a = e^{\log_e a} = e^{\log a} \\ \text{se } f(x) > 0 \text{ allora} & f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \log f(x)} \end{cases}.$$

PROPRIETA' DEI LOGARITMI

Siano x e y numeri reali positivi: $x > 0$ e $y > 0$, sia $a > 0, a \neq 1$, e sia $\alpha \in \mathbb{R}$.
Valgono allora le seguenti proprietà:
$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$: il **logaritmo di un prodotto** è uguale alla somma dei logaritmi;
$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$: il **logaritmo di un quoziente** è uguale alla differenza dei logaritmi;
$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x$: il **logaritmo di una potenza** è uguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base.
Non si confonda $\log_a x^k = \log_a\left(x^k\right) = k \cdot \log_a x$ con $\log_a^k x = (\log_a x)^k$.
A quest'ultima espressione non è applicabile alcuna proprietà.

Valgono infine le seguenti ulteriori proprietà:
siano x, y, a e b numeri reali: $x > 0$ e $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$
cambio di base in un logaritmo : $\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x$, da cui: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$;
reciproco di un logaritmo : $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$;
logaritmo del reciproco : $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b = \log_{\frac{1}{a}} b$.

FUNZIONI LOGARITMICHE

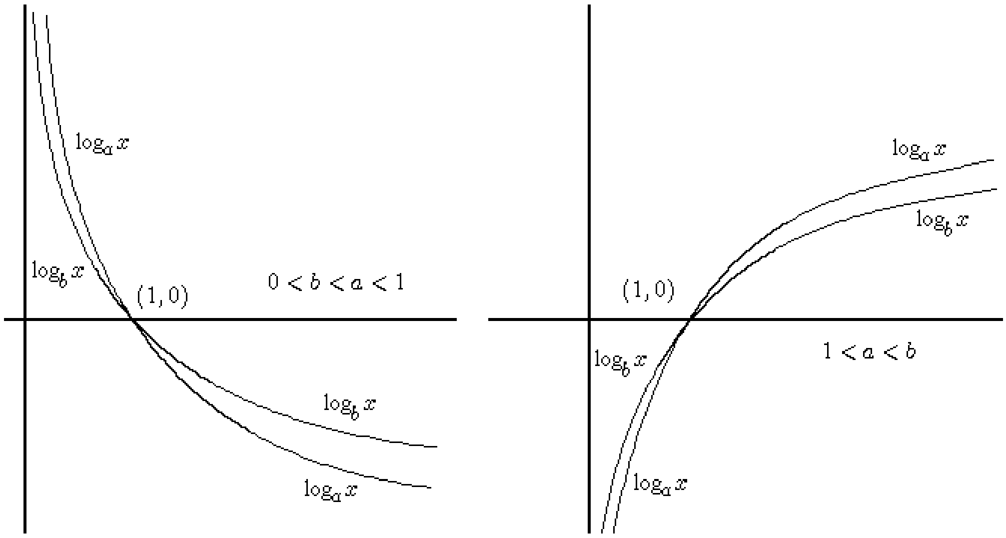
Le funzioni logaritmiche sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente x il ruolo di argomento di un logaritmo. L'argomento della funzione logaritmica, essendo questa l'inversa della funzione esponenziale, può assumere solo valori reali strettamente positivi.
Scrivemo allora $y = f(x) = \log_a x, \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ per indicare una generica funzione logaritmica.
Le caratteristiche e le proprietà delle funzioni logaritmiche variano a seconda che la base a sia $0 < a < 1$ oppure $a > 1$.
Non esiste funzione logaritmica in base $a = 1$; non hanno senso funzioni logaritmiche in base $a \leq 0$.

FUNZIONI LOGARITMICHE CON BASE $a > 1$

Dato $a > 1$, consideriamo la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$.
La funzione logaritmica con base maggiore di uno è definita $\forall x > 0$, ha un codominio che risulta illimitato sia superiormente che inferiormente, è strettamente crescente $\forall x > 0$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$.

FUNZIONI LOGARITMICHE CON BASE $0 < a < 1$

Dato $0 < a < 1$, consideriamo la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$.
La funzione logaritmica con base minore di uno è definita $\forall x > 0$, ha un codominio che risulta illimitato sia superiormente che inferiormente, è strettamente decrescente $\forall x > 0$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$.
La figura di sinistra rappresenta il grafico di due funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, con $0 < b < a < 1$.



Dato $1 < a$, consideriamo la funzione logaritmica $f(x) = \log_a x, \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
La funzione logaritmica con base maggiore di uno è definita $\forall x > 0$, ha un codominio che risulta illimitato sia superiormente che inferiormente, è strettamente crescente $\forall x > 0$, ha per asintoto verticale la retta $x = 0$.
La figura di destra rappresenta il grafico di due funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$ e $g(x) = \log_b x$, con $1 < a < b$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

L'**equazione** esponenziale $a^x = k$ ha l'unica soluzione $x = \log_a k$, purchè sia $k > 0$.
Se $k \leq 0$ l'equazione esponenziale $a^x = k$ non ha soluzioni.
Per quanto riguarda le **disequazioni** esponenziali, valgono le seguenti proprietà:
- se $a > 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$, per cui:
la disequazione $a^x > k$ è risolta per $x > \log_a k$ se $k > 0$;
la disequazione $a^x > k$ è sempre soddisfatta se $k \leq 0$;
- se $0 < a < 1$: $x_1 > x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, per cui:
la disequazione $a^x > k$ è risolta per $x < \log_a k$ se $k > 0$;
la disequazione $a^x > k$ è sempre soddisfatta se $k \leq 0$.

Valgono poi le seguenti ulteriori proprietà:

se $1 < a < b$: $\begin{cases} b^x > a^x & \text{per } x > 0 \\ b^x < a^x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

se $0 < b < a < 1$: $\begin{cases} b^x > a^x & \text{per } x < 0 \\ b^x < a^x & \text{per } x > 0 \end{cases}$.

EQUAZIONI E DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

L'**equazione** logaritmica $\log_a x = k$ ha sempre l'unica soluzione $x = a^k$, qualunque sia il valore $k \in \mathbb{R}$.
L'equazione logaritmica $\log_a x = 0$ ha l'unica soluzione $x = 1$, qualunque sia il valore a.
Per quanto riguarda le **disequazioni** logaritmiche, valgono le seguenti proprietà:
se $a > 1, x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$, per cui:
la disequazione $\log_a x > k$ è risolta per $x > a^k$, qualunque sia il valore k;
se $0 < a < 1, x_1 > x_2 > 0 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$, per cui:
la disequazione $\log_a x > k$ è risolta per $0 < x < a^k$, qualunque sia il valore k.

Valgono poi le seguenti ulteriori proprietà:

se $1 < a < b : \begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{per } x > 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{per } 0 < x < 1 \end{cases}$

se $0 < b < a < 1 : \begin{cases} \log_a x > \log_b x & \text{per } 0 < x < 1 \\ \log_a x < \log_b x & \text{per } x > 1 \end{cases}$.

FUNZIONI POTENZA

Le funzioni potenza sono le funzioni elementari ottenute assegnando alla variabile indipendente il ruolo di base di una potenza ad esponente costante, diversamente dalle funzioni esponenziali nelle quali è variabile l'esponente mentre è la base ad essere costante.

POTENZE AD ESPONENTE NATURALE, INTERO E RAZIONALE

Presi $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, si definisce la **potenza ad esponente naturale** x^n come il prodotto del numero x per sè stesso n volte: $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot ... \cdot x}_{n \text{ volte}}$.

Preso $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $z \in \mathbb{Z}_-$, posto $z = -n, n \in \mathbb{N}$, si definisce la **potenza ad esponente intero** (negativo) x^z come: $x^z = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

Preso $n \in \mathbb{N}^*$ si definisce la **potenza ad esponente razionale** $x^{\frac{1}{n}}$ come $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Tale definizione è valida $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se n è un numero dispari: $n = 2m + 1, m \in \mathbb{N}$.

Se n invece è un numero pari, $n = 2m, m \in \mathbb{N}$, la definizione vale solo per $x \geq 0$.

Sia ora $q \in \mathbb{Q}, q = \dfrac{m}{n}$, con $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*$, e siano m e n primi tra loro, ovvero privi di sottomultipli comuni.

Preso $q \in \mathbb{Q}_+$, si definisce la **potenza ad esponente razionale** $x^{\frac{m}{n}}$ come $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.

Tale definizione è valida $\forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, m \in \mathbb{N}$, se n è un numero dispari: $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$.

Se n invece è un numero pari, $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, la definizione vale solo per $x \geq 0, \forall\, m \in \mathbb{N}$, con m numero dispari, dato che $q = \dfrac{m}{n}$ è stata ridotta ai minimi termini.

Per quanto detto in precedenza, è bene prestare attenzione ad espressioni quali, ad esempio, $x^{\frac{6}{4}}$. L'esponente $\dfrac{6}{4}$ non è una frazione ridotta ai minimi termini. E' vero che $\dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$, ma non è vero che $x^{\frac{6}{4}} = x^{\frac{3}{2}}, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Questa uguaglianza è valida solo per $x \geq 0$, mentre per $x < 0$ esiste $x^{\frac{6}{4}}$ ma non esiste $x^{\frac{3}{2}}$.

Una volta garantita l'esistenza di $x^{\frac{m}{n}}$, si ha che $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m$.

E vale anche l'uguaglianza, per $x \neq 0$: $x^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{x^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$.

PROPRIETA' DELLE POTENZE

Se $x,\ y \in \mathbb{R}^*,\ m, n \in \mathbb{Z}$, valgono le seguenti proprietà :

$$\begin{cases} x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\ \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \\ (x^m)^n = x^{mn} \end{cases} \quad \text{e le} \quad \begin{cases} x^n \cdot y^n = (x \cdot y)^n \\ \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n \end{cases} .$$

Ricordiamo infine che $x^0 = 1, \forall\, x \neq 0$ (0^0 non è definito !).

Tali proprietà valgono anche per $m, n \in \mathbb{Q}$, però con la limitazione $x \geq 0$ o $x > 0$, per i motivi esposti in precedenza.

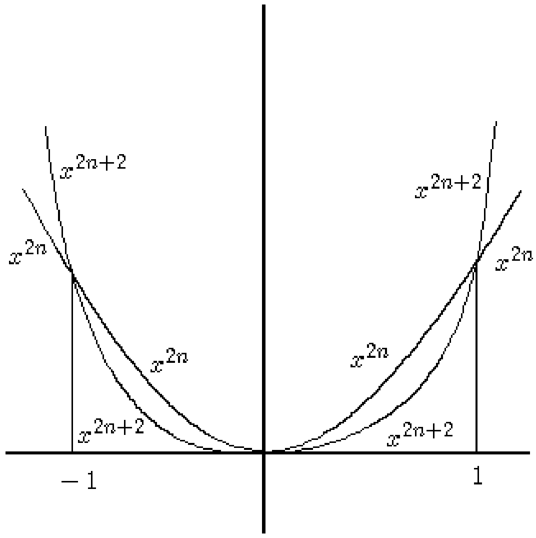
Esempio 13 : La potenza $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$ è definita solamente per $x \geq 0$, e per tali valori risulta $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{3}}$, mentre $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, e risulta $\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left|x^{\frac{1}{3}}\right|$ (Valore Assoluto di $x^{\frac{1}{3}}$). Non è quindi vero, in generale, che $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{m}{n}}$.

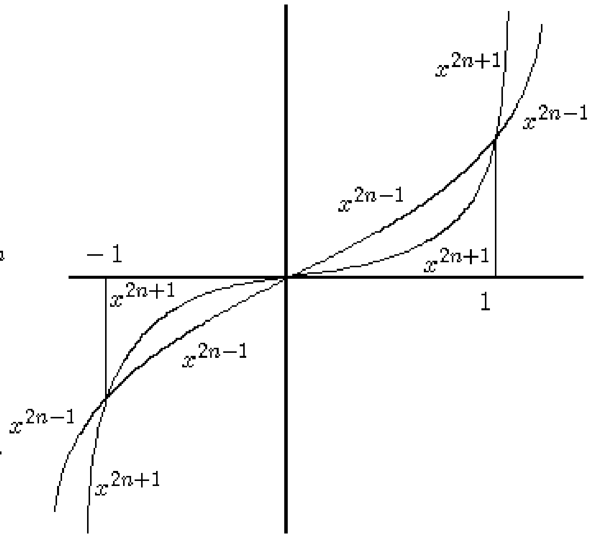
FUNZIONI POTENZA

Le funzioni potenza sono quelle funzioni elementari nelle quali la variabile indipendente compare come base di una potenza con esponente reale assegnato α : $f(x) = x^{\alpha}$. Il campo d'esistenza di una funzione potenza varia a seconda che l'esponente α sia un numero naturale, un intero, un razionale o un reale.
Avremo infatti che:
se $\alpha \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$;
se $\alpha \in \mathbb{Z}_{-}$, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
mentre, dati m e n primi tra loro, ovvero $\frac{m}{n}$ frazione irriducibile:
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \frac{m}{n} > 0$, con n dispari, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$,
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \frac{m}{n} > 0$, con n pari, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}_{+}$, cioè per $x \geq 0$;
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \frac{m}{n} < 0$, con n dispari, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
se $\alpha \in \mathbb{Q},\ \alpha = \frac{m}{n} < 0$, con n pari, $f(x) = x^{\alpha}$ è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}_{+} \setminus \{0\}$, cioè per $x > 0$.
Le funzioni potenza $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero con α numero irrazionale, sono definite per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, e sono definite per $x > 0$ se $\alpha < 0$.

FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE NATURALE

Le funzioni potenza ad esponente naturale $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{N}^{*}$, vanno scisse in due gruppi: quelle per cui $\alpha = 2n, n \in \mathbb{N}^{*}$, ovvero con α numero pari, e quelle per cui $\alpha = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero con α numero dispari.
La funzione potenza ad esponente pari $f(x) = x^{2n}, n \in \mathbb{N}^{*}$, è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente in quanto $x^{2n} \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$; è strettamente crescente $\forall\, x > 0$, strettamente decrescente $\forall\, x < 0$.
La funzione potenza ad esponente dispari $f(x) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio illimitato sia superiormente che inferiormente; è strettamente crescente $\forall\, x \in \mathbb{R}$.



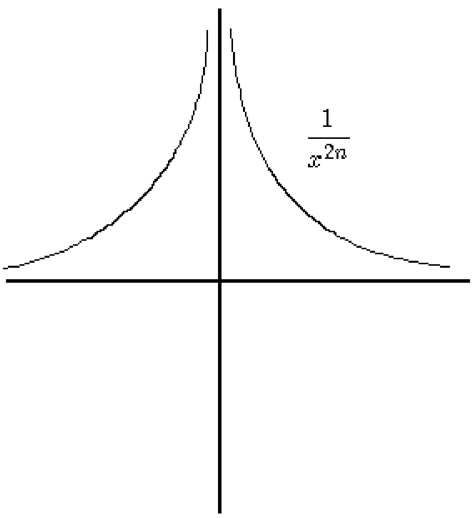


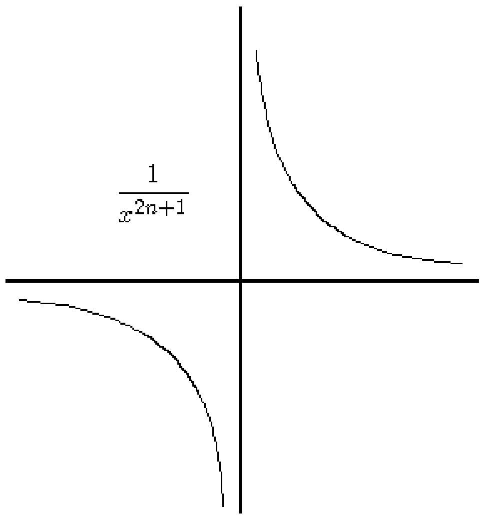
FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE INTERO NEGATIVO

Le funzioni potenza ad esponente intero negativo $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Z}$, vanno scisse in due gruppi: quelle per cui $\alpha = -2n, n \in \mathbb{N}^*$, ovvero α è l'opposto di un numero pari, e quelle per cui $\alpha = -(2n+1), n \in \mathbb{N}$, ovvero α è l'opposto di un numero dispari.

La funzione potenza $f(x) = x^{-2n}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; è una funzione pari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente, in quanto $x^{-2n} > 0 \, \forall x$; ha per asintoto verticale la retta $x = 0$, ha per asintoto orizzontale la retta $y = 0$; è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$.

La funzione potenza $f(x) = x^{-(2n+1)}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e inferiormente; ha per asintoto verticale la retta $x = 0$, ha per asintoto orizzontale la retta $y = 0$; è decrescente per $x < 0$ e decrescente per $x > 0$.





FUNZIONI RADICE

Vengono dette funzioni radice le funzioni $f(x) = x^{\alpha}, \alpha = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, da cui $f(x) = \sqrt[n]{x}$.

Le funzioni radice sono le funzioni inverse delle funzioni potenza ad esponente naturale.

Dato che le funzioni potenza ad esponente pari $f(x) = x^{2n}$, al contrario di quelle ad esponente dispari $f(x) = x^{2n+1}$, non sono funzioni invertibili su tutto $\mathbb{R}$, essendo:

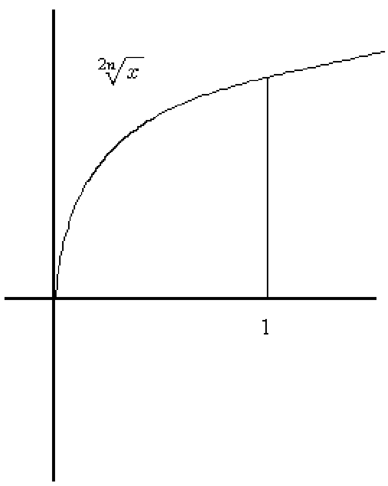
$y = x^n \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{n}}$, avremo:

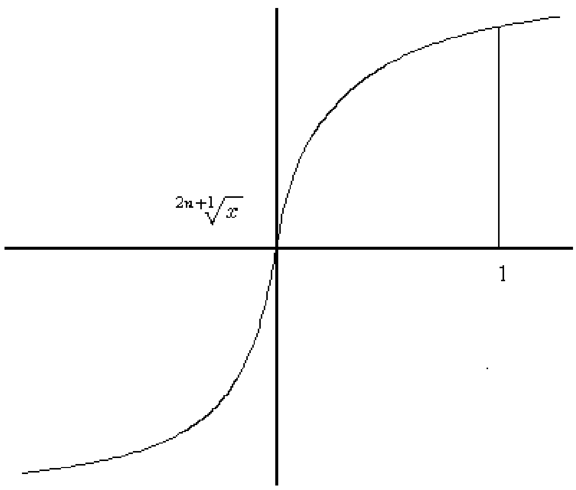
$x \to x^{2n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la cui inversa è: $x \to \sqrt[2n]{x} \; : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$x \to x^{2n+1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la cui inversa è: $x \to \sqrt[2n+1]{x} \; : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

La funzione radice ad indice pari $f(x) = \sqrt[2n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall\, x \geq 0$; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e limitato inferiormente in quanto $\sqrt[2n]{x} \geq 0, \forall\, x \geq 0$; è strettamente crescente $\forall\, x \geq 0$. Si veda la figura di sinistra.

La funzione radice ad indice dispari $f(x) = \sqrt[2n+1]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, è una funzione dispari, quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi; ha un codominio che risulta illimitato superiormente e inferiormente; è strettamente crescente $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Si veda la figura di destra.





FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE RAZIONALE

Le funzioni potenza ad esponente razionale $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{Q}, \alpha = \frac{m}{n}$, hanno un grafico il cui andamento è riconducibile a quelli esposti nei casi precedentemente descritti. Supposto che $\frac{m}{n}$ sia una frazione irriducibile, occorre distinguere vari casi, vedendo se l'esponente $\frac{m}{n}$ è positivo o negativo, se in quantità è maggiore o minore di 1, se m e n sono ambedue dispari oppure uno pari ed uno dispari.

FUNZIONI POTENZA AD ESPONENTE IRRAZIONALE

Le funzioni potenza $f(x) = x^{\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ovvero con α numero irrazionale, sono definite per $x \geq 0$ se $\alpha > 0$, e sono definite per $x > 0$ se $\alpha < 0$. I loro grafici hanno un andamento riconducibile a quelli esposti nei casi precedentemente descritti; anche ora si tratta di distinguere a seconda che l'esponente α sia positivo o negativo, e se, in quantità, maggiore o minore di 1.

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE O CIRCOLARI

MISURA DEGLI ANGOLI IN RADIANTI

Dato un angolo, la cui misura in gradi sessagesimali sia $\alpha°$, esso risulta individuato da due semirette aventi un punto in comune O. Scelto un punto qualunque sulla prima semiretta, A, si tracci, internamente all'angolo dato, l'arco di circonferenza di centro O e raggio $\overline{OA}$, fino ad incontrare l'altra semiretta in un punto B. Si definisce misura in **radianti** dell'angolo, e si indica con α_R, il rapporto $\alpha_R = \dfrac{\overline{\widehat{AB}}}{\overline{OA}}$ tra la lunghezza dell'arco sotteso e la misura del raggio che lo sottende.

Un angolo giro, $\alpha° = 360°$, avrà ad esempio misura in radianti pari a $\alpha_R = \dfrac{2\,\pi\, r}{r} = 2\,\pi$, mentre l'angolo di 180° avrà misura in radianti pari a $\alpha_R = \dfrac{\pi\, r}{r} = \pi$.

Vale la proporzione: $\alpha° : \alpha_R = 360° : 2\pi$, oppure $\alpha° : \alpha_R = 180° : \pi$, che permette di calcolare la misura in radianti di un angolo, nota quella in gradi, come $\alpha_R = \dfrac{\pi \cdot \alpha°}{180°}$, e viceversa : $\alpha° = \dfrac{180° \cdot \alpha_R}{\pi}$.

La misura in radianti, vista la definizione, è un numero reale compreso tra 0 e 2π.

SENO E COSENO DI UN ANGOLO

Sia dato un angolo, la cui misura in radianti sia $\alpha_R = \alpha$, e si consideri, nel piano cartesiano, la circonferenza di centro l'origine O e raggio pari a 1, di equazione $x^2 + y^2 = 1$, la cosiddetta circonferenza trigonometrica. Vediamo in che modo ogni numero reale può essere visto come la misura in radianti di un angolo.

Per ogni angolo della geometria si ha che: $0 \leq \alpha° \leq 360°$, ovvero, in radianti, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

Iniziando dal punto $(1, 0)$ si percorra un tratto di circonferenza di lunghezza pari ad α, girando in senso antiorario, e determinando così in modo univoco un punto P.

Se $\alpha = 2\pi$ riotteniamo il punto $(1, 0)$, dopo aver percorso una volta la circonferenza. Sia l'angolo $\alpha = 0$ che l'angolo $\alpha = 2\pi$ vengono quindi a corrispondere al punto $P = (1, 0)$.

Si consideri ora di poter percorrere sulla circonferenza trigonometrica, sempre partendo da $(1, 0)$, lunghezze anche superiori a quella del singolo giro.

Percorrendo la circonferenza in senso antiorario, e facendo quanti giri occorrono, si definiscono gli angoli di misura positiva grande quanto si vuole.

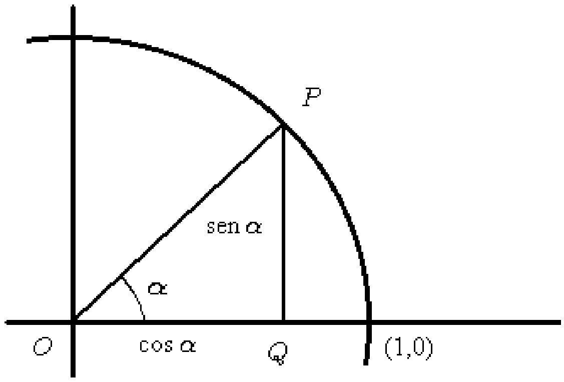
Se invece percorriamo la circonferenza in senso orario, possiamo definire gli angoli di misura negativa, anche questa senza limitazione di grandezza.

Ogni numero reale, positivo o negativo, grande o piccolo, determina in questo modo un unico punto P sulla circonferenza. Angoli di misure diverse determineranno lo stesso punto P se le loro misure differiscono per un multiplo intero, positivo o negativo, di 2π.

Visto che, con la procedura sopra descritta, ad ogni numero reale α corrisponde un unico punto P sulla circonferenza trigonometrica, definiamo:

il **seno** dell'angolo α come: $\operatorname{sen}\alpha =$ ordinata del punto P

il **coseno** dell'angolo α come: $\cos\alpha =$ ascissa del punto P.



Vista la definizione, segue subito che: $-1 \leq \operatorname{sen} \alpha \leq 1$ e $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$.
Vale anche l'**identità trigonometrica** fondamentale: $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, verificabile sia mediante la $x^2 + y^2 = 1$, che deve essere soddisfatta dalle coordinate di $P = (\cos \alpha; \operatorname{sen} \alpha)$, sia applicando il Teorema di Pitagora al triangolo di vertici O, P e Q.

SENO E COSENO DEGLI ANGOLI PRINCIPALI
Vediamo i valori di $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$ per alcuni **angoli particolari**. Risulta:

$\operatorname{sen} 0 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$ $\qquad$ $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1$ $\qquad$ $\cos \frac{\pi}{2} = \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen} \pi = \operatorname{sen}(-\pi) = 0$ $\qquad$ $\cos \pi = \cos(-\pi) = -1$

$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ $\qquad$ $\cos \frac{3\pi}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} = \cos \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} = \cos \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI COMPLEMENTARI
Siano dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; valgono allora le seguenti formule, che esprimono le relazioni intercorrenti tra le funzioni circolari di due **angoli complementari**:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$

ovvero per due angoli complementari avviene lo scambio delle funzioni trigonometriche: il coseno dell'uno è uguale al seno dell'altro. Come esempio notevole abbiamo che:

$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

Valgono anche altre relazioni, inerenti angoli che differiscono di multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{sen} \alpha$

$\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{sen} \alpha.$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE DI ANGOLI SUPPLEMENTARI

Siano dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tali che $\alpha + \beta = \pi$; valgono allora le seguenti formule, che esprimono le relazioni intercorrenti tra le funzioni circolari di due **angoli supplementari**:

$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

Valgono anche le seguenti relazioni, inerenti angoli che differiscono per multipli di π:

$\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\operatorname{sen}(2\pi + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad\cos(2\pi + \alpha) = \cos\alpha$

$\operatorname{sen}(2\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha.$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, valgono le seguenti, dette formule di **addizione e sottrazione**:

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta.$

FORMULE DI DUPLICAZIONE E BISEZIONE

Ponendo, nelle formule di addizione, $\alpha = \beta$, si ricavano le formule, dette di **duplicazione**:

$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1.$

Dalla $\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ e dalla $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ si ricavano, a meno di un cambio di segno, le seguenti formule, dette di **bisezione**:

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$ $\qquad\cos\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$.

La scelta del segno viene fatta in base al quadrante a cui appartiene il punto che rappresenta α.

FORMULE DI PROSTAFERESI

Partendo dalle formule di addizione e sottrazione, e ponendo: $\alpha + \beta = v, \alpha - \beta = w$, si ricavano le seguenti formule, dette formule di **prostaferesi**:

$$\operatorname{sen} v + \operatorname{sen} w = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{v + w}{2}\right) \cos\left(\frac{v - w}{2}\right)$$

$$\operatorname{sen} v - \operatorname{sen} w = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{v - w}{2}\right) \cos\left(\frac{v + w}{2}\right)$$

$$\cos v + \cos w = 2 \cos\left(\frac{v + w}{2}\right) \cos\left(\frac{v - w}{2}\right)$$

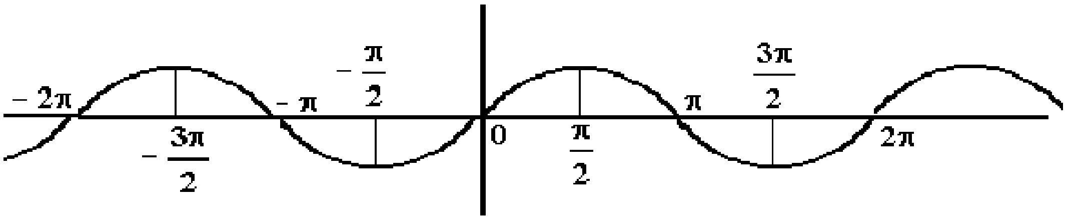
$$\cos v - \cos w = -2 \operatorname{sen}\left(\frac{v + w}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{v - w}{2}\right)$$

FUNZIONE SENO

La **funzione seno** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore del seno dell'angolo stesso. Avremo allora: $f(x) = \operatorname{sen} x, \mathbb{R} \to [-1; 1]$.

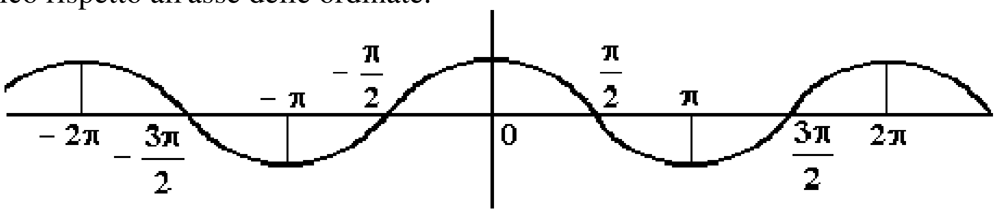
La funzione seno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta limitato tra -1 e $+1$, è periodica di periodo 2π, ovvero: $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + k \cdot 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$.

La funzione seno è una funzione dispari, ovvero $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.



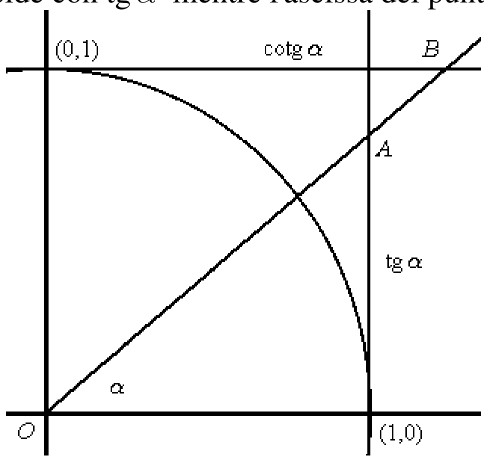
FUNZIONE COSENO

La **funzione coseno** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore del coseno dell'angolo stesso. Avremo allora: $f(x) = \cos x, \mathbb{R} \to [-1; 1]$.
La funzione coseno è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio che risulta limitato tra -1 e $+1$, è periodica di periodo 2π, ovvero: $\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$.
La funzione coseno è una funzione pari, ovvero $\cos x = \cos(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.



TANGENTE E COTANGENTE DI UN ANGOLO

Dato un angolo, la cui misura in radianti sia α, si definiscono:
la **tangente** dell'angolo α, come: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}, \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$;
la **cotangente** dell'angolo α, come: $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Avremo quindi anche che $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$. Della tangente e della cotangente di un angolo α si può dare una rappresentazione nel piano Cartesiano, utilizzando due nuovi assi di riferimento: per la tangente, una parallela all'asse delle ordinate passante per il punto $(1, 0)$ e per la cotangente una parallela all'asse delle ascisse passante per il punto $(0, 1)$.
L'ordinata del punto A coincide con $\operatorname{tg}\alpha$ mentre l'ascissa del punto B coincide con $\operatorname{cotg}\alpha$.



TANGENTE E COTANGENTE DEGLI ANGOLI PRINCIPALI

Vediamo i valori di $\operatorname{tg}\alpha$ e $\operatorname{cotg}\alpha$ per alcuni angoli particolari. Sarà:

$\operatorname{tg}0 = \operatorname{tg}\pi = \operatorname{tg}2\pi = 0$ mentre $\operatorname{cotg}0$, $\operatorname{cotg}\pi$, $\operatorname{cotg}2\pi$ non esistono

$\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{2} = \operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{2} = 0$ mentre $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}$ e $\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{2}$ non esistono

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4} = \operatorname{cotg}\dfrac{5\pi}{4} = 1 \qquad \operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4} = \operatorname{cotg}\dfrac{3\pi}{4} = \operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{4} = \operatorname{cotg}\dfrac{7\pi}{4} = -1$

$\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}\,.$

FUNZIONE TANGENTE

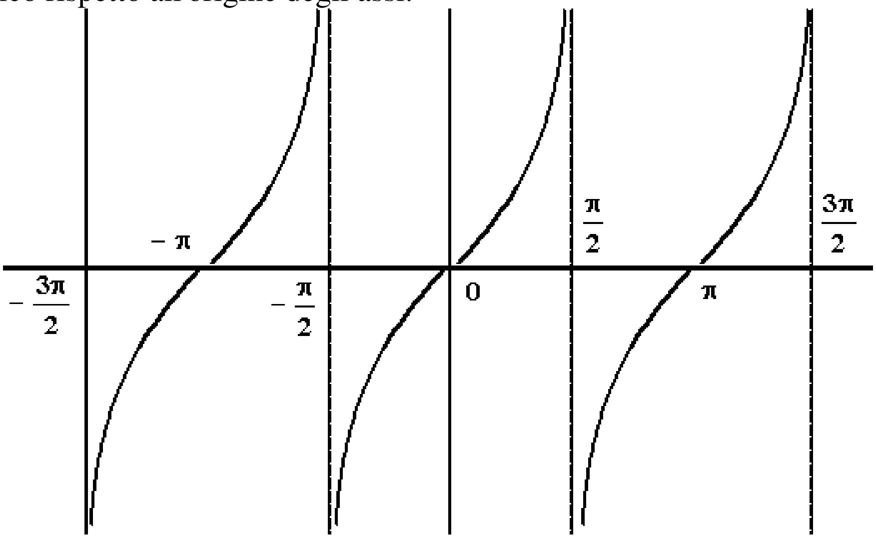
La **funzione tangente** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore della tangente dell'angolo stesso.

Sarà allora: $f(x) = \operatorname{tg} x, \mathbb{R} \setminus \left\{x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}\,.$

La funzione tangente è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi, k \in \mathbb{Z}$; ha un codominio illimitato inferiormente e superiormente, è periodica di periodo π, ovvero: $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + k\,\pi), \forall\, k \in \mathbb{Z}\,.$

La funzione tangente è crescente in ogni intervallo del tipo $\left]\dfrac{2k-1}{2}\,\pi\,;\,\dfrac{2k+1}{2}\,\pi\right[, k \in \mathbb{Z}\,.$

La funzione tangente è una funzione dispari, ovvero $\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.



SENO E COSENO MEDIANTE LA TANGENTE

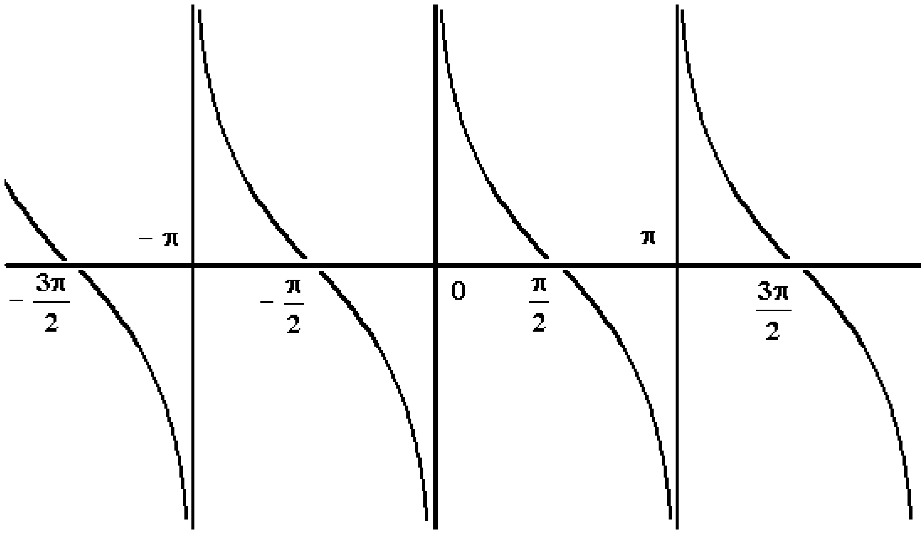
Valgono le seguenti formule, che, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$, permettono di esprimere seno e coseno dell'angolo α mediante la tangente dell'angolo $\dfrac{\alpha}{2}$:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} \qquad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}\,.$$

FUNZIONE COTANGENTE

La **funzione cotangente** associa ad un numero reale, visto come misura di un angolo in radianti, il valore della cotangente dell'angolo stesso.

Sarà allora: $f(x) = \operatorname{cotg} x, \mathbb{R} \setminus \{x = k\,\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}\,.$



La funzione cotangente è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $x \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; ha codominio illimitato inferiormente e superiormente, è periodica di periodo π, ovvero: $\operatorname{cotg} x = \operatorname{cotg}(x + k\,\pi), \forall\, k \in \mathbb{Z}$.
La funzione cotangente è decrescente in ogni intervallo del tipo $\left]k\,\pi\,;\,(k+1)\,\pi\right[, k \in \mathbb{Z}$.
La funzione cotangente è una funzione dispari, ovvero $\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}(-x)$, e quindi il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

SECANTE E COSECANTE DI UN ANGOLO
Sia dato un angolo, la cui misura in radianti sia α. Si definiscono:
la **secante** dell'angolo α, come: $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
la **cosecante** dell'angolo α, come: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, $\alpha \neq k\,\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Risulta quindi $\dfrac{\sec\alpha}{\operatorname{cosec}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$ e $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\sec\alpha} = \operatorname{cotg}\alpha$.

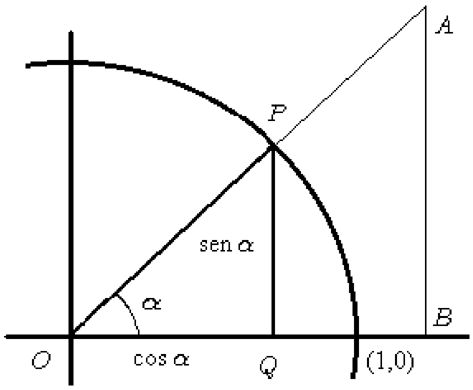
TEOREMI DI TRIGONOMETRIA PER TRIANGOLI RETTANGOLI
Dato un triangolo rettangolo OAB, retto in B, per le proprietà dei triangoli simili e per le definizioni del seno e del coseno, otteniamo:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\overline{AO}}{1} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}\alpha,$$ ovvero:

in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto stesso.
Otteniamo anche:

$$\frac{\overline{BO}}{\overline{QO}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \Rightarrow \frac{\overline{BO}}{\cos\alpha} = \frac{\overline{AO}}{1} \Rightarrow \overline{BO} = \overline{AO} \cdot \cos\alpha,$$ ovvero:

in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto stesso.



Dalle due uguaglianze ottenute: $\overline{AB} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}\alpha$ e $\overline{BO} = \overline{AO} \cdot \cos\alpha$, dividendo, si ha:
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BO}} = \dfrac{\overline{AO} \cdot \operatorname{sen}\alpha}{\overline{AO} \cdot \cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \overline{AB} = \overline{BO} \cdot \operatorname{tg}\alpha$, ovvero:
in un triangolo rettangolo un cateto è uguale all'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al cateto stesso.

ALTRE FUNZIONI

FUNZIONI IPERBOLICHE

Mediante la funzione $f(x) = e^x$, si definiscono le cosiddette funzioni iperboliche:

Seno iperbolico di x: $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

Coseno iperbolico di x: $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$;

Tangente iperbolica di x: $\operatorname{tgh} x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

Cotangente iperbolica di x: $\operatorname{cotgh} x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$, per $x \neq 0$.

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

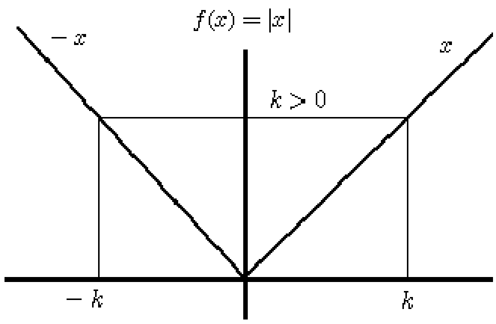
Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce il **valore assoluto** (o modulo) di x come: $|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$.

La funzione $f(x) = |x|$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$, ha un codominio illimitato superiormente e limitato inferiormente, in quanto $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$; il suo grafico è dato dalla semibisettrice del 2^ quadrante per $x < 0$ e dalla semibisettrice del 1^ quadrante per $x \geq 0$.

L'**equazione** $|x| = k$: $\begin{cases} \text{ha due soluzioni : } x = \pm k & \text{se } k > 0 \\ \text{ha la soluzione } x = 0 & \text{se } k = 0 \\ \text{non ha soluzioni} & \text{se } k < 0. \end{cases}$

La disequazione $|x| > k$ è risolta : $\begin{cases} \text{per } x < -k \text{ e per } x > k & \text{se } k > 0 \\ \text{per ogni } x \neq 0 & \text{se } k = 0 \\ \text{è sempre soddisfatta} & \text{se } k < 0. \end{cases}$

La disequazione $|x| < k$ è risolta : $\begin{cases} \text{per } -k < x < k & \text{se } k > 0 \\ \text{non è mai soddisfatta} & \text{se } k \leq 0. \end{cases}$



FUNZIONE PARTE INTERA

Dato $x \in \mathbb{R}$, si definisce la parte intera di x come: $[x] = \text{Ma}x\,\{\text{z} \in \mathbb{Z}, \text{z} \leq x\}$.
La funzione parte intera associa ad ogni numero reale x la sua parte intera.
Sarà quindi $f(x) = [x], \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$; la funzione parte intera è definita $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ha un codominio illimitato superiormente e inferiormente, è crescente $\forall\, x \in \mathbb{R}$ in quanto è costante a tratti.