Prova Intermedia di ANALISI MATEMATICA 24/11/2023

I M 1) Calcolare le radici quadrate del numero $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{2i-1}{3-i}$.

Sarà $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{2i-1}{3-i} = \dfrac{(3-i)-(1+i)(2i-1)}{(1+i)(3-i)} = \dfrac{3-i-2i+2+1+i}{3+3i-i+1} =$
$z = \dfrac{6-2i}{4+2i} = \dfrac{3-i}{2+i} \cdot \dfrac{2-i}{2-i} = \dfrac{6-2i-3i-1}{4+1} = \dfrac{5-5i}{5} = 1-i$.
Da $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{4}\right)$ segue:
$\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\dfrac{7\pi}{8} + k\dfrac{2\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\dfrac{7\pi}{8} + k\dfrac{2\pi}{2}\right)\right)$, $0 \le k \le 1$ e quindi:
se $k = 0$: $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{8} + i \operatorname{sen}\dfrac{7\pi}{8}\right)$;
se $k = 1$: $\sqrt[4]{2}\left(\cos\dfrac{15\pi}{8} + i \operatorname{sen}\dfrac{15\pi}{8}\right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, verificare che essa risulta continua in $(0,0)$, determinando poi, mediante la definizione, se in tale punto essa ammette le derivate parziali e se risulta differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)}{\varrho} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho^2\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right) = 0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho^2\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)\right| \le \varrho^2(1+\varrho) < \varepsilon$, soddisfatta per $0 < \varrho^2(1+\varrho) < \varrho^2 + \varrho^3 < 2\varrho^2 < \varepsilon$. La funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h^3+0}{\sqrt{h^2+0}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{|h|\cdot h} = 0\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{0+h^4}{\sqrt{0+h^2}} - 0\right)\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{|h|\cdot h} = 0\,.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right) = 0\,;$$

la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\left(\cos^3\vartheta + \varrho \operatorname{sen}^4\vartheta\right)\right| \le \varrho(1+\varrho) < \varepsilon$, soddisfatta per $0 < \varrho(1+\varrho) < \varrho + \varrho^2 < 2\varrho < \varepsilon$. La funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data $f(x,y)=x^2-y^2$, siano u e v i versori di $(1,1)$ e di $(1,-1)$. Sapendo che $\mathcal{D}_u f(\mathrm{P}_0)=\sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0)=2\sqrt{2}$, determinare P_0 e calcolare poi $\mathcal{D}^2_{u,v} f(\mathrm{P}_0)$.

La funzione, essendo un polinomio, risulta differenziabile ovunque.
Da $u=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e dato il gradiente $\nabla f(x,y)=(2x;-2y)$ dovrà risultare, posto $\mathrm{P}_0=(x,y)$:

$$\begin{cases}\mathcal{D}_u f(\mathrm{P}_0)=\nabla f(x,y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(2x;-2y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\\ \mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0)=\nabla f(x,y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=(2x;-2y)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x-2y=2\\2x+2y=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y=1\\x+y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-2+x=1\\y=2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=3\\y=2-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{3}{2}\\y=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

Quindi $\mathrm{P}_0=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$. Essendo $\mathbb{H}(x,y)=\mathbb{H}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{Vmatrix}2&0\\0&-2\end{Vmatrix}$ avremo:

$$\mathcal{D}^2_{u,v} f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=u\cdot\mathbb{H}\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\cdot v^T=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}2&0\\0&-2\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\text{ da cui:}$$

$$\mathcal{D}^2_{u,v} f\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{Vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{Vmatrix}=1+1=2\,.$$

I M 4) Verificare che con l'equazione $f(x,y,z)=ye^x-2xe^z+ze^y=0$, soddisfatta nel punto $P=(1,1,1)$, si può definire implicitamente una funzione $z=z(x,y)$, della quale determinare poi dz e d^2z.

Da $\nabla f(x,y,z)=(ye^x-2e^z;e^x+ze^y;-2xe^z+e^y)$ si ha $\nabla f(1,1,1)=(-e;2e;-e)$ ed essendo $f'_z(1,1,1)=-e\neq 0$ si può definire implicitamente una funzione $z=z(x,y)$.
Risulta $\frac{\partial z}{\partial x}(1;1)=-\frac{-e}{-e}=-1$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1;1)=-\frac{2e}{-e}=2$ e quindi:
$\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$. Usiamo poi la $\mathrm{d}^2z=-\frac{\mathrm{d}^2f(1,1,1)}{f'_z(1,1,1)}$.

Essendo $\mathbb{H}(x,y,z)=\begin{Vmatrix}ye^x&e^x&-2e^z\\e^x&ze^y&e^y\\-2e^z&e^y&-2xe^z\end{Vmatrix}$ sarà $\mathbb{H}(1,1,1)=\begin{Vmatrix}e&e&-2e\\e&e&e\\-2e&e&-2e\end{Vmatrix}$

e quindi $\mathrm{d}^2f(1,1,1)=e\,(\mathrm{d}x)^2+e\,(\mathrm{d}y)^2-2e\,(\mathrm{d}z)^2+2e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+2e\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

e quindi $\mathrm{d}^2z=-\frac{e\,(\mathrm{d}x)^2+e\,(\mathrm{d}y)^2-2e\,(\mathrm{d}z)^2+2e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4e\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+2e\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{-e}=$

$\mathrm{d}^2z=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2-2(\mathrm{d}z)^2+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Ma $\mathrm{d}z=-\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y=2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x$ e quindi sostituendo:

$\mathrm{d}^2z=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2-2(2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)^2+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-4\,\mathrm{d}x\,(2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)+2\,\mathrm{d}y\,(2\mathrm{d}y-\mathrm{d}x)$

avremo infine $\mathrm{d}^2z=3\,(\mathrm{d}x)^2-3\,(\mathrm{d}y)^2$.

I M 5) Dato il sistema $\begin{cases}f(x,y,z)=x^3y^2+y^2z^2-xyz-x=0\\g(x,y,z)=e^{x-z}-e^{y-z}=0\end{cases}$, ed i punti $\mathrm{P}_0=(0,0,0)$ e $\mathrm{P}_1=(1,1,1)$, determinare con quale dei due si possa definire una funzione implicita $y\to(x,z)$ e di questa calcolare il vettore tangente nel punto opportuno.

Calcoliamo la matrice Jacobiana :

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{Vmatrix} 3x^2y^2 - yz - 1 & 2x^3y + 2yz^2 - xz & 2y^2z - xy \\ e^{x-z} & -e^{y-z} & -e^{x-z} + e^{y-z} \end{Vmatrix} \text{ da cui:}$$

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(0,0,0) = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix} \text{ mentre } \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \begin{Vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Occorre quindi trovare un minore formato con le derivate fatte rispetto a x e z che abbia il determinante diverso da 0.

Dato che $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ mentre $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, solo il secondo sistema soddisfa le condizioni del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y \to (x,z)$.

Per questa funzione avremo:

$$\frac{\partial x}{\partial y}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{-1} = 1 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial y}(1;1) = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{-4}{-1} = -4.$$

Il vettore tangente in $y = 1$ sarà quindi $(1. -4)$.