$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2023- Compito } \mathbb{A}1}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{2^x-1}\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+5}\right)^x .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{2^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot\frac{3x}{x}\cdot\frac{1}{\frac{2^x-1}{x}}=1\cdot 3\cdot\frac{1}{\log 2}=\frac{3}{\log 2}=3\log_2 e=\log_2 e^3 .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+7}{2x+5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+5+2}{2x+5}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+5}\right)^{2x+5}\right]^{\frac{x}{2x+5}}=\left(e^2\right)^{\frac{1}{2}}=e$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\sqrt{1-\log(1-x)}$.

Dovrà essere $\begin{cases}1-x>0\\1-\log(1-x)\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\\log(1-x)\le 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\1-x\le e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\x\ge 1-e\end{cases}$
e quindi $\mathcal{C.E.}$: $[1-e;1[$ ovvero $1-e\le x<1$.

3) Date le funzioni $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $g(x)=2^x+1$ e $h(x)=x-2$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x)))=f(g(x-2))=f\left(2^{x-2}+1\right)=\frac{2^{x-2}+1+1}{2^{x-2}+1-1}=\frac{2^{x-2}+2}{2^{x-2}}=1+2^{3-x} .$$

Da $1+2^{3-x}=y\Rightarrow 2^{3-x}=y-1\Rightarrow 3-x=\log_2(y-1)\Rightarrow x=3-\log_2(y-1)$
e quindi la funzione inversa: $y=3-\log_2(x-1)=\log_2\dfrac{8}{(x-1)}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è falsa.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C}$	$(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

La proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{B}\,o\,\mathbb{C})$ è falsa quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono false.

5) Date le funzioni $f(x)=3^{2x+1}+k$ e $g(x)=\log(x-2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Risulta $f(0) = 3^{0+1} + k = 3 + k$ mentre $g(x) = \log(x-2) = 0$ se $x - 2 = 1 \Rightarrow x = 3$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2} \cdot (3+k) \cdot 3 = 6 \Rightarrow 3 + k = 4 \Rightarrow k = 1$.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{B}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{\operatorname{tg} x} \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+2} \right)^x .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+(-x))}{(-x)} \cdot \frac{-x}{\operatorname{tg} x} = 1 \cdot (-1) = -1 .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+2} \right)^x = \left(\to \frac{3}{2} \right)^{(\to +\infty)} = +\infty .$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{1}{\log_2(x-3) - 2}$.

Dovrà essere:

$$\begin{cases} x - 3 > 0 \\ \log_2(x-3) - 2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \log_2(x-3) \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x - 3 \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \neq 7 \end{cases} \text{ e quindi:}$$

$\mathcal{C.E.} :]3; 7[\cup]7; +\infty[$ ovvero $3 < x$ e $x \neq 7$.

3) Date le funzioni $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$ e $h(x) = 2x + 1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(2x+1)) = f\left(\frac{2x+1-1}{2x+1+2} \right) = f\left(\frac{2x}{2x+3} \right) = \log_2 \left(\frac{2x}{2x+3} \right).$$

Da $\log_2 \left(\dfrac{2x}{2x+3} \right) = y \Rightarrow \dfrac{2x}{2x+3} = 2^y \Rightarrow 2x = 2^y(2x+3) \Rightarrow 2x(1-2^y) = 3 \cdot 2^y \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{3 \cdot 2^y}{2(1-2^y)}$ e quindi la funzione inversa: $y = \dfrac{3 \cdot 2^x}{2(1-2^x)} = \dfrac{3 \cdot 2^{x-1}}{1-2^x}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{C}$ è falsa.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}$	$\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B}$	$(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0

La proposizione $(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ è falsa quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono false.

5) Date le funzioni $f(x)=2^{2-x}+1$ e $g(x)=\log(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Risulta $f(0)=2^{2-0}+1=5$ mentre $g(x)=\log(x-k)=0$ se $x-k=1\Rightarrow x=k+1$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot(k+1)=5\Rightarrow k+1=2\Rightarrow k=1$.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{C}1$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{\operatorname{sen}x}\;;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^x.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{\operatorname{sen}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^2-1}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{sen}x}=2\cdot 1=2\,,\ \text{da}\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-5}{x+3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3-8}{x+3}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{(-8)}{x+3}\right)^{x+3}\right]^{\frac{x}{x+3}}=\left(e^{-8}\right)^1=e^{-8}.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x)=\log(1-\log(1-x))$.

Dovrà essere: $\begin{cases}1-x>0\\ 1-\log(1-x)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\ \log(1-x)<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\ 1-x<e\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1\\ x>1-e\end{cases}$
e quindi: $\mathcal{C.E.}:\ ]1-e;1[$ ovvero $1-e<x<1$.

3) Date le funzioni $f(x)=3x-1$, $g(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ e $h(x)=2^x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x)))=f(g(2^x))=f\left(\frac{2\cdot 2^x}{2^x+1}\right)=3\,\frac{2\cdot 2^x}{2^x+1}-1=\frac{6\cdot 2^x-2^x-1}{2^x+1}=\frac{5\cdot 2^x-1}{2^x+1}.$$

Da $\dfrac{5\cdot 2^x-1}{2^x+1}=y\Rightarrow 5\cdot 2^x-1=y\,(2^x+1)\Rightarrow 2^x\,(5-y)=y+1\Rightarrow 2^x=\dfrac{y+1}{5-y}\Rightarrow$
$\Rightarrow x=\log_2\dfrac{y+1}{5-y}$ e quindi la funzione inversa: $y=\log_2\dfrac{x+1}{5-x}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{C}\,e\,\mathbb{A})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{A}$ è vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$	$\mathbb{C}\,e\,\mathbb{A}$	$(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\Rightarrow(\mathbb{C}\,e\,\mathbb{A})$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	1

La proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C}\, e\, \mathbb{A})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono vere mentre $\mathbb{C}$ è falsa.

5) Date le funzioni $f(x) = k + 2^{1+2x}$ e $g(x) = \log(2x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Risulta $f(0) = k + 2^{1+0} = k+2$ mentre $g(x) = \log(2x-3) = 0$ se $2x-3 = 1 \Rightarrow x = 2$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot (k+2) = 5 \Rightarrow k+2 = 5 \Rightarrow k = 3$.

$\boxed{\text{Prova Intermedia Anno 2023- Compito } \mathbb{D}1}$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(3^x - 1)} \; ; \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+2x}{1+3x} \right)^x .$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(3^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{3^x - 1}{x}} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\log 3} = \log_3 e .$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+2x}{1+3x} \right)^x = \left(\to \frac{2}{3} \right)^{(\to +\infty)} = 0^+ .$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{\log(1-x)}$.

Dovrà essere: $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x > 0 \\ \log(1-x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ 1 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$ e quindi: $\mathcal{C.E.} :]0;1[$ ovvero $0 < x < 1$.

3) Date le funzioni $f(x) = \dfrac{x}{x-2}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = 3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

$$f(g(h(x))) = f(g(3x)) = f(\log(3x)) = \frac{\log(3x)}{\log(3x) - 2} .$$

Da $\dfrac{\log(3x)}{\log(3x)-2} = y \Rightarrow \log(3x) = y(\log(3x) - 2) \Rightarrow \log(3x)(y-1) = 2y \Rightarrow$

$\Rightarrow \log(3x) = \dfrac{2y}{y-1} \Rightarrow 3x = e^{\frac{2y}{y-1}} \Rightarrow x = \dfrac{1}{3} e^{\frac{2y}{y-1}}$ e quindi la funzione inversa: $y = \dfrac{1}{3} e^{\frac{2x}{x-1}}$.

4) Date le tre generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è vera.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$	$(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0

La proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono vere mentre $\mathbb{C}$ è falsa e quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono false mentre $\mathbb{B}$ è vera.

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-x}$ e $g(x) = \log(x - 2k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Risulta $f(0) = 3^{1-0} = 3$ mentre $g(x) = \log(x - 2k) = 0$ se $x - 2k = 1 \Rightarrow x = 2k + 1$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2k+1) = 6 \Rightarrow 2k + 1 = 4 \Rightarrow 2k = 3 \Rightarrow k = \dfrac{3}{2}$.