Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{A}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tg}x}\ ;\ \ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{1+x}\right)^{x}.$$

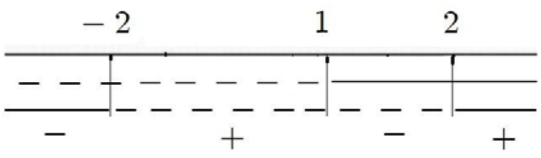
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\operatorname{sen}x)}{\operatorname{sen}x}\cdot\frac{\operatorname{sen}x}{x}\cdot\frac{x}{\operatorname{tg}x}=1\cdot 1\cdot 1=1\,.$$
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+3x}{1+x}\right)^{x}=(\,\to 3)^{(\to+\infty)}=\,+\infty\,.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ e che $f(g(x))=\dfrac{2x}{x+1}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

Da $f(x)=\dfrac{3x}{x+2}$ otteniamo $f(g(x))=\dfrac{3g(x)}{g(x)+2}=\dfrac{2x}{x+1}$ e quindi:
$$3g(x)(x+1)=2x\,(g(x)+2)\Rightarrow g(x)(3x+3-2x)=4x\Rightarrow g(x)=\frac{4x}{x+3}\,.$$
Da $g(x)=\dfrac{4x}{x+3}=y\Rightarrow 4x=y\,(x+3)\Rightarrow x\,(4-y)=3y\Rightarrow x=\dfrac{3y}{4-y}$ e quindi sarà:
$$g^{-1}(x)=\frac{3x}{4-x}\,.$$

3) Data la funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{x-1}{x^2-4}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

Dovrà essere $\dfrac{x-1}{x^2-4}>0\Rightarrow\begin{cases}x-1>0\\x^2-4>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>1\\x<-2\,\cup x>2\end{cases}$ e quindi:




come si vede risulta $\mathcal{C.E.}:\,]-2;1[\cup]2;+\infty[$ ovvero $-2<x<1\ \cup\ 2<x\,.$

4) Date le funzioni $f(x)=2^{x+3}+k$ e $g(x)=\log(x-1)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia $k$ un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 10.

Risulta $f(0)=2^3+k=8+k$ mentre $g(x)=\log(x-1)=0$ se $x-1=1\Rightarrow x=2$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot(8+k)\cdot 2=10\Rightarrow 8+k=10\Rightarrow k=2\,.$

5) Date le generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, costruire le tavole di verità della proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{D})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è sempre vera mentre la proposizione $\mathbb{D}$ è sempre falsa.

| $\mathbb{A}$ | $\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{D}$ | $P_1$:$(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})e(\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{D})$ | $P_2$:$\mathbb{A}o\mathbb{D}$ | $P_1\Leftrightarrow P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

La proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{A}\, o\, \mathbb{D})$ è falsa quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono vere mentre $\mathbb{D}$ è falsa e quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ sono false mentre $\mathbb{B}$ è vera.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{B}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{6+x}\right)^x .$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2}\cdot\frac{4x^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1=2\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5+x}{6+x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+6-1}{x+6}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{(-1)}{x+6}\right)^{x+6}\right]^{\frac{x}{x+6}}=\left(e^{-1}\right)^1=\frac{1}{e}\,.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$ e che $f(g(x))=\dfrac{x+1}{x+4}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

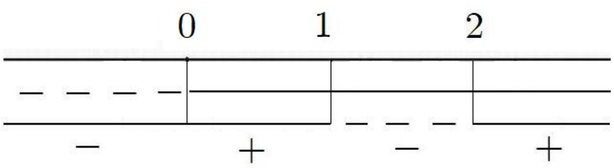
Da $f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$ otteniamo $f(g(x))=\dfrac{2g(x)}{g(x)+2}=\dfrac{x+1}{x+4}$ e quindi:

$$2g(x)(x+4)=(x+1)\,(g(x)+2)\Rightarrow g(x)(2x+8-x-1)=2x+2\Rightarrow g(x)=\frac{2x+2}{x+7}\,.$$

Da $g(x)=\dfrac{2x+2}{x+7}=y\Rightarrow 2x+2=y\,(x+7)\Rightarrow x\,(2-y)=7y-2\Rightarrow x=\dfrac{7y-2}{2-y}$ e quindi sarà: $g^{-1}(x)=\dfrac{7x-2}{2-x}$ .

3) Data la funzione $f(x)=\log\left(\dfrac{x}{x^2-3x+2}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

Dovrà essere $\dfrac{x}{x^2-3x+2}>0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-3x+2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\(x-1)(x-2)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x<1\cup x>2\end{cases}$ e quindi:



come si vede risulta $\mathcal{C.E.}$ : $]0;1[\,\cup\,]2;+\infty[$ ovvero $0<x<1\ \cup\ 2<x$.

4) Date le funzioni $f(x)=3^{x+2}-1$ e $g(x)=\log(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia $k$ un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a $4$.

Risulta $f(0)=3^2-1=8$ mentre $g(x)=\log(x-k)=0$ se $x-k=1\Rightarrow x=k+1$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot(k+1)=4\Rightarrow k+1=1\Rightarrow k=0$.

5) Date le generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, costruire le tavole di verità della proposizione $[(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D})]\Rightarrow(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{D})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è sempre falsa mentre la proposizione $\mathbb{C}$ è sempre vera.

| $\mathbb{A}$ | $\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D}$ | $P_1$:$[(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})o(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D})]$ | $P_2$:$\mathbb{A}e\mathbb{D}$ | $P_1\Rightarrow P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

La proposizione $[(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{B})\,o\,(\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D})]\Rightarrow(\mathbb{A}\,e\,\mathbb{D})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono false mentre $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ sono vere e quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{D}$ sono false mentre $\mathbb{C}$ è vera.

## Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{C}2$

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^2-1}{\operatorname{sen}^2 x}\ ;\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x .$$

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^2-1}{\operatorname{sen}^2 x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^2-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x}=2\cdot1=2 \text{ da } \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x=\left(\to\tfrac{1}{2}\right)^{(\to+\infty)}=0^+ .$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ e che $f(g(x))=\dfrac{x-2}{2x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

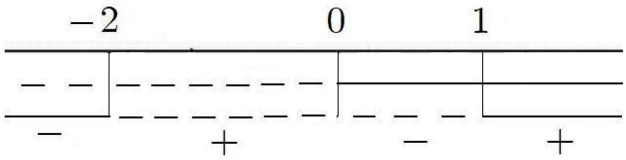
Da $f(x)=\dfrac{2x}{x+1}$ otteniamo $f(g(x))=\dfrac{2g(x)}{g(x)+1}=\dfrac{x-2}{2x}$ e quindi:

$$2g(x)\cdot2x=(x-2)(g(x)+1)\Rightarrow g(x)(4x-x+2)=x-2\Rightarrow g(x)=\frac{x-2}{3x+2}.$$

Da $g(x)=\dfrac{x-2}{3x+2}=y\Rightarrow x-2=y(3x+2)\Rightarrow x(1-3y)=2y+2\Rightarrow x=\dfrac{2y+2}{1-3y}$ e quindi sarà: $g^{-1}(x)=\dfrac{2x+2}{1-3x}$.

3) Data la funzione $f(x) = \log\left(\dfrac{x}{x^2+x-2}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

Dovrà essere $\dfrac{x}{x^2+x-2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ (x-1)(x+2)>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<-2 \cup x>1 \end{cases}$ e quindi:




come si vede risulta $\mathcal{C.E.} : ]-2;0[\cup]1;+\infty[$ ovvero $-2 < x < 0 \,\cup\, 1 < x$.

4) Date le funzioni $f(x) = k + 3^{1+2x}$ e $g(x) = \log(2x-3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia $k$ un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Risulta $f(0) = k + 3^1 = k + 3$ mentre $g(x) = \log(2x-3) = 0$ se $2x-3=1 \Rightarrow x=2$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)} = \dfrac{1}{2}\cdot(k+3)\cdot 2 = 6 \Rightarrow k+3=6 \Rightarrow k=3$.

5) Date le generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, costruire le tavole di verità della proposizione $[(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{A}$ è sempre vera mentre la proposizione $\mathbb{D}$ è sempre falsa.

| $\mathbb{A}$ | $\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{A} o \mathbb{B}$ | $\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D}$ | $P_1{:}(\mathbb{A} o \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{C}\Leftrightarrow\mathbb{D})$ | $P_2{:}\mathbb{C}\Rightarrow\mathbb{B}$ | $P_1\Leftrightarrow P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

La proposizione $[(\mathbb{A}\, o\, \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{C} \Leftrightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ è falsa quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$ sono vere e $\mathbb{D}$ è falsa.

## Prova Intermedia Anno 2023- Compito $\mathbb{D}$2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\operatorname{sen} x}$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-3x}{2-x}\right)^x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{2^x-1}{x} = 1\cdot\log 2 = \log 2 .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-3x}{2-x}\right)^x = (\to 3)^{(\to+\infty)} = +\infty .$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \dfrac{x+2}{1-x}$ e che $f(g(x)) = \dfrac{3x+1}{x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

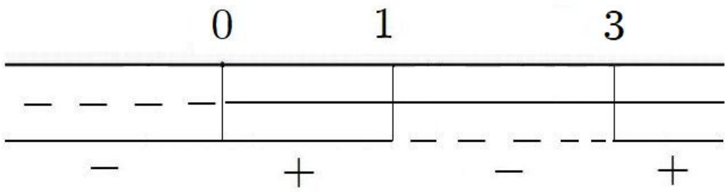
Da $f(x)=\dfrac{x+2}{1-x}$ otteniamo $f(g(x))=\dfrac{g(x)+2}{1-g(x)}=\dfrac{3x+1}{x}$ e quindi:

$(g(x)+2)\,x=(3x+1)\,(1-g(x))\Rightarrow g(x)(x+3x+1)=3x+1-2x\Rightarrow g(x)=\dfrac{x+1}{4x+1}$

Da $g(x)=\dfrac{x+1}{4x+1}=y\Rightarrow x+1=y\,(4x+1)\Rightarrow x\,(1-4y)=y-1\Rightarrow x=\dfrac{y-1}{1-4y}$ e quindi sarà: $g^{-1}(x)=\dfrac{x-1}{1-4x}$.

3) Data la funzione $f(x)=\log_3\left(\dfrac{x^2-4x+3}{x}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

Dovrà essere $\dfrac{x^2-4x+3}{x}>0\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x^2-4x+3>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\(x-1)(x-3)>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\x<1\cup x>3\end{cases}$ e quindi:




come si vede risulta $\mathcal{C.E.}:\ ]0;1[\,\cup\,]3;+\infty[$ ovvero $0<x<1\ \cup\ 3<x$.

4) Date le funzioni $f(x)=3^{1+x}$ e $g(x)=\log(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia $k$ un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro $k$ in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 3.

Risulta $f(0)=3^1=3$ mentre $g(x)=\log(x-k)=0$ se $x-k=1\Rightarrow x=k+1$ e quindi avremo: $\text{Area(AOB)}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot(k+1)=3\Rightarrow k+1=2\Rightarrow k=1$.

5) Date le generiche proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$, costruire le tavole di verità della proposizione $[(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})\,o\,(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{D})]\Rightarrow(\mathbb{C}\,e\,\mathbb{D})$ sapendo che la proposizione $\mathbb{B}$ è sempre vera mentre la proposizione $\mathbb{A}$ è sempre falsa.

| $\mathbb{A}$ | $\mathbb{B}$ | $\mathbb{C}$ | $\mathbb{D}$ | $\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C}$ | $\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{D}$ | $P_1{:}(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})o(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{D})$ | $P_2{:}\mathbb{C}e\mathbb{D}$ | $P_1\Rightarrow P_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

La proposizione $[(\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C})\,o\,(\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{D})]\Rightarrow(\mathbb{C}\,e\,\mathbb{D})$ è falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono false mentre $\mathbb{B}$ e $\mathbb{D}$ sono vere e quando $\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$ e $\mathbb{D}$ sono false mentre $\mathbb{B}$ è vera.