

COMPITO di ANALISI MATEMATICA 11/01/2024

I M 1) Se $z = 1 - \sqrt{3}i$, calcolare $\sqrt{z^3}$.

Da $z = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ risulta:

$$z^3 = 2^3(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = 8(\cos \pi + i\sin \pi) = -8.$$

Per cui: $\sqrt{z^3} = \sqrt{-8} = \sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)\right)$, $0 \leq k \leq 1$ ovvero

$$\sqrt{z^3} = \sqrt{-8} = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right), 0 \leq k \leq 1 \text{ e quindi}$$

$$\text{se } k = 0 : 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}i;$$

$$\text{se } k = 1 : 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}(-i) = -2\sqrt{2}i.$$

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la

funzione risulta differenziabile in $(0, 0)$, si calcoli, usando la definizione, $\mathcal{D}_v f(0, 0)$, dove v è il versore di $(1, 1)$.

Calcoliamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3 \cos^3 \vartheta}{\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \cos^3 \vartheta = 0; \text{ la convergenza è uniforme dato che } |\varrho \cos^3 \vartheta| \leq \varrho < \varepsilon, \text{ soddisfatta per } 0 < \varrho < \varepsilon. \text{ La funzione è continua in } (0, 0).$$

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^3}{h^2 + 0} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{0}{0 + h^2} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h^3} = 0.$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3}{x^2 + y^2} - 0 - (1, 0) \cdot (x, y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^3 - x y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ e quindi se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x y^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{-\varrho^3 \cos \vartheta \sin^2 \vartheta}{\varrho^3} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (-\cos \vartheta \sin^2 \vartheta) = (-\cos \vartheta \sin^2 \vartheta);$$

il limite risulta uguale a zero solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0, 0)$.

Per calcolare $\mathcal{D}_v f(0,0)$, dove v è il versore di $(1,1)$, dato che la funzione in $(0,0)$ non è risultata differenziabile, bisogna usare la definizione, ovvero calcolare:

$$\mathcal{D}_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0,0) + tv) - f(0,0)}{t} \quad \text{dove } v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e quindi}$$

$$\mathcal{D}_v f(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3}{2\sqrt{2}}}{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} \cdot \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4t^3}{2\sqrt{2}t^3} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Quindi } \mathcal{D}_v f(0,0) = \sqrt{2}.$$

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^4 y - y^3 x = 0$ ed il punto $P_0 = (1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x \rightarrow y(x)$ da questa definita.

Dato il gradiente : $\nabla f(x,y) = (4x^3 y - y^3; x^4 - 3y^2 x)$ da cui $\nabla f(1,1) = (3; -2)$;

essendo $f'_y = -2 \neq 0$ si può definire una funzione implicita $x \rightarrow y(x)$ con derivata prima:

$$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{vmatrix} 12x^2 y & 4x^3 - 3y^2 \\ 4x^3 - 3y^2 & -6yx \end{vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(1,1) = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}$ per cui, dalla

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(1) = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}(y') + f''_{yy}(y')^2}{f'_y} \quad \text{avremo :}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}(1) = -\frac{12 + 2 \cdot \frac{3}{2} - 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2}{-2} = \frac{15 - \frac{27}{2}}{2} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Quindi } P_2(x,1) = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}(x-1)^2 = 1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{8}(x-1)^2.$$

I M 4) Data $f(x,y) = e^x - e^y$, sia v il versore di $(1,1)$. Si verifichi che se in un punto (x,y) risulta $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, allora risulta anche $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(x,y) = 0$.

La funzione $f(x,y) = e^x - e^y$ è ovunque differenziabile due volte, ed avremo quindi:

$$\mathcal{D}_v f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot v = (e^x, -e^y) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - e^y) \text{ e pure}$$

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(x,y) = v \cdot \mathbb{H}(x,y) \cdot v^T = \left\| \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} e^x & 0 \\ 0 & -e^y \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2}(e^x - e^y).$$

Se $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, allora $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^x - e^y) = 0$ ovvero $e^x - e^y = 0$ e quindi risulterà pure:

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(x,y) = \frac{1}{2}(e^x - e^y) = 0.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases}.$

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 + 4y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}.$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione ammissibile \mathcal{E} (ellisse) che è un insieme compatto, il vincolo è qualificato, e quindi possiamo

applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda) = x + y - \lambda(x^2 + 4y^2 - 1).$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \neq 0 \\ \Lambda'_y = 1 \neq 0 \\ x^2 + 4y^2 \leq 1 \end{cases} \text{ e quindi il sistema non ammette soluzioni.}$$

2) caso $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + 4\frac{1}{64\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + 4\frac{1}{64\lambda^2} = \frac{5}{16\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow . \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{5}{16} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{1}{8\lambda} \\ \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = -\frac{\sqrt{5}}{4} \end{cases} . \end{aligned}$$

Avendo trovato due sole soluzioni, per il Teorema di Weierstrass una ci da il punto di massimo e l'altra il punto di minimo. Essendo $f(x, y) = x + y$ risulta $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ mentre $f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ e quindi $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ risulta il punto di massimo assoluto mentre $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ risulta il punto di minimo assoluto.

II M 2) Data $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$, studiare la natura dei suoi punti stazionari.

La funzione, essendo un polinomio, è differenziabile di ogni ordine in tutto \mathbb{R}^2 .

Imponendo le condizioni del I ordine avremo:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) = (3x^2 + 3y^2 - 6x, 6xy - 6y) &\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\ 6xy - 6y = 6y(x - 1) = 0 \end{cases} \text{ e quindi:} \\ \begin{cases} 3x^2 - 6x = 3x(x - 2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \text{ oppure} \\ \begin{cases} 3y^2 - 3 = 3(y^2 - 1) = 0 \\ x = 1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} . \end{aligned}$$

Abbiamo quindi quattro punti stazionari: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

Essendo $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} 6x - 6 & 6y \\ 6y & 6x - 6 \end{vmatrix}$ risulterà:

$$\mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = -6 < 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases} \text{ per cui } (0, 0) \text{ è punto di massimo;}$$

$$\mathbb{H}(2, 0) = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 36 > 0 \end{cases} \text{ per cui } (2, 0) \text{ è punto di minimo;}$$

$$\mathbb{H}(1, 1) = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -36 < 0 \text{ per cui } (1, 1) \text{ è punto di sella;}$$

$$\mathbb{H}(1, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -36 < 0 \text{ per cui } (1, -1) \text{ è punto di sella.}$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases} .$$

Da $y'' - 4y' + 3y = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 3} = 2 \pm 1$ e quindi le due soluzioni $\lambda = 3$ e $\lambda = 1$ per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea per $y(x)$ sarà: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x$.

Dato che il termine noto $y = 2e^x$ compare anche tra le componenti della soluzione generale, per trovare la soluzione particolare dell'equazione non omogenea dobbiamo vedere la soluzione $\lambda = 1$ come una soluzione doppia e quindi ipotizzare una soluzione particolare del tipo $y = ae^x + bxe^x$ da cui avremo: $y' = ae^x + be^x + bxe^x = (a + b)e^x + bxe^x$ e da questa:

$$y'' = (a + b)e^x + be^x + bxe^x = (a + 2b)e^x + bxe^x . \text{ Andando a sostituire si ha:}$$

$$(a + 2b)e^x + bxe^x - 4((a + b)e^x + bxe^x) + 3(ae^x + bxe^x) = -2be^x = 2e^x \Rightarrow b = -1 .$$

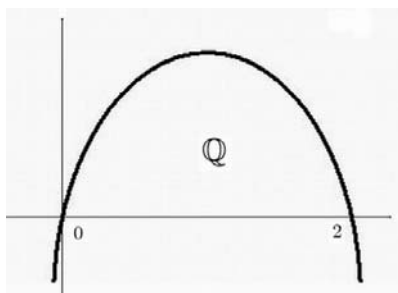
La soluzione generale della non omogenea sarà quindi $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - xe^x$.

Imponendo le condizioni, da $\begin{cases} y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - xe^x \\ y'(x) = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^x - e^x - xe^x \end{cases}$ otteniamo:

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 = 1 \\ y'(0) = 3c_1 + c_2 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 - c_1 \\ 3c_1 + 1 - c_1 - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{2} \\ c_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi la soluzione particolare del problema: $y(x) = -\frac{1}{2}e^{3x} + \frac{3}{2}e^x - xe^x$.

II M 4) Calcolare $\iint_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy$, dove $\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$.



Vista la regione di integrazione:

$\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x - x^2\}$ avremo:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{Q}} xy \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^{2x-x^2} xy \, dy \, dx = \int_0^2 x \left(\frac{y^2}{2} \Big|_0^{2x-x^2} \right) dx = \int_0^2 x \frac{(2x-x^2)^2}{2} dx = \\ &= \int_0^2 x \left(2x^2 + \frac{x^4}{2} - 2x^3 \right) dx = \int_0^2 2x^3 + \frac{x^5}{2} - 2x^4 dx = \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{12} x^6 - \frac{2}{5} x^5 \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{1}{2} 16 + \frac{1}{12} 64 - \frac{2}{5} 32 = 8 + \frac{16}{3} - \frac{64}{5} = \frac{120 + 80 - 192}{15} = \frac{8}{15} . \end{aligned}$$