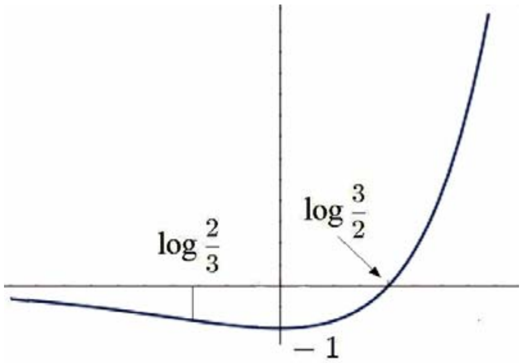
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 11/01/2024 - A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} 2e^{3x} - 3e^{2x} = (0-0) = 0^-$ dato che e^{3x} è infinitesimo di ordine superiore rispetto a e^{2x};
$\lim_{x\to+\infty} 2e^{3x} - 3e^{2x} = (+\infty - \infty) = +\infty$ dato che e^{3x} è infinito di ordine superiore rispetto a e^{2x}.
$f(x) > 0$ per $2e^{3x} - 3e^{2x} > 0 \Rightarrow e^{2x}(2e^x - 3) > 0 \Rightarrow e^x > \frac{3}{2} \Rightarrow x > \log\frac{3}{2}$;
$f\left(\log\frac{3}{2}\right) = 2\left(e^{\log\frac{3}{2}}\right)^3 - 3\left(e^{\log\frac{3}{2}}\right)^2 = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4} - \frac{27}{4} = 0$.
$f'(x) = 6e^{3x} - 6e^{2x} > 0 \Rightarrow 6e^{2x}(e^x - 1) > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$ e quindi la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$. Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo assoluto con $f(0) = 2 - 3 = -1$.
Da $f'(x) = 6e^{3x} - 6e^{2x}$ avremo poi :
$f''(x) = 18e^{3x} - 12e^{2x} > 0 \Rightarrow 6e^{2x}(3e^x - 2) > 0 \Rightarrow e^x > \frac{2}{3} \Rightarrow x > \log\frac{2}{3} < 0$ e quindi:
$f(x)$ è funzione concava per $x < \log\frac{2}{3}$, convessa per $x > \log\frac{2}{3}$.
Nel punto $x = \log\frac{2}{3}$ abbiamo un punto di flesso con:
$f\left(\log\frac{2}{3}\right) = 2\left(e^{\log\frac{2}{3}}\right)^3 - 3\left(e^{\log\frac{2}{3}}\right)^2 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{27} - \frac{12}{9} = \frac{16-36}{27} = -\frac{20}{27}$.
Non ci sono asintoti obliqui.

Grafico:



$\log\frac{2}{3} \approx -0,17 \quad \log\frac{3}{2} \approx 0,17$

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{x-1}$.

a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$; oppure:
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+1}\right)^{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{(-3)}{x+1}\right)^{x+1}\right]^{\frac{x-1}{x+1}}=\left(e^{-3}\right)^{1}=\dfrac{1}{e^{3}}\,.$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}kx}=5\,.$

Risulta $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\operatorname{sen}kx}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{sen}3x}{3x}\cdot\dfrac{3x}{kx}\cdot\dfrac{kx}{\operatorname{sen}kx}=1\cdot\dfrac{3}{k}\cdot1=\dfrac{3}{k}=5\Rightarrow k=\dfrac{3}{5}\,.$

4) Date le funzioni $f(x)=3x-2$ e $g(x)=2^{1-x}$, si determini l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, trovando anche dove queste ultime risultano invertibili nonchè l'espressione della loro inversa.

Risulta $f(g(x))=f\left(2^{1-x}\right)=3\cdot2^{1-x}-2\,.$
Da $f(g(x))=3\cdot2^{1-x}-2$ avremo $[f(g(x))]'=3\cdot2^{1-x}\cdot\log2\cdot(-1)<0$ in tutto $\mathbb{R}$.
Quindi la funzione è invertibile in tutto $\mathbb{R}$.
Da $3\cdot2^{1-x}-2=y$ si ha $3\cdot2^{1-x}=y+2\Rightarrow2^{1-x}=\dfrac{y+2}{3}\Rightarrow1-x=\log_2\left(\dfrac{y+2}{3}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow x=1-\log_2\left(\dfrac{y+2}{3}\right)$ e quindi la funzione inversa di $f(g(x))$ sarà:
$[f(g(x))]^{-1}=y=1-\log_2\left(\dfrac{x+2}{3}\right)=\log_2 2-\log_2\left(\dfrac{x+2}{3}\right)=\log_2\left(\dfrac{6}{x+2}\right)\,.$
Risulta $g(f(x))=g(3x-2)=2^{1-(3x-2)}=2^{3-3x}\,.$
Da $g(f(x))=2^{3-3x}$ avremo $[g(f(x))]'=2^{3-3x}\cdot\log2\cdot(-3)<0$ in tutto $\mathbb{R}$.
Quindi la funzione è invertibile in tutto $\mathbb{R}$.
Da $2^{3-3x}=y$ si ha $3-3x=\log_2 y\Rightarrow3x=3-\log_2 y\Rightarrow x=\dfrac{3-\log_2 y}{3}=1-\dfrac{\log_2 y}{3}$ e quindi la funzione inversa di $g(f(x))$ sarà:
$[g(f(x))]^{-1}=y=1-\dfrac{\log_2 x}{3}=\log_2 2-\frac{1}{3}\log_2 x=\log_2 2-\log_2\sqrt[3]{x}=\log_2\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}\,.$

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}-e^{-x}\,\mathrm{d}x\,.$

Determinata una primitiva avremo:

$$\int_0^1 e^{3x}-e^{-x}\,\mathrm{d}x=\left(\frac{e^{3x}}{3}+e^{-x}\right|_0^1=\left[\frac{e^3}{3}+e^{-1}\right]-\left[\frac{e^0}{3}+e^{-0}\right]=$$
$$=\left(\frac{e^3}{3}+\frac{1}{e}\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{e^3}{3}+\frac{1}{e}-\frac{4}{3}\,.$$

6) Date $f(x)=e^{kx-1}$ e $g(x)=1+\log x$, determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo tale che i grafici delle due funzioni abbiano la stessa retta tangente nel punto $x=1$.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\,.$
Per la funzione $f(x)=e^{kx-1}$ si ha $f(1)=e^{k-1}$; da $f'(x)=k\,e^{kx-1}$ si ha $f'(1)=k\,e^{k-1}$;
per la funzione $g(x)=1+\log x$ si ha $g(1)=1$; da $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ si ha $g'(1)=1\,.$
Per avere la stessa retta tangente dovrà risultare :

$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{k-1} = 1 \\ k\, e^{k-1} = 1 \end{cases}$ ambedue vere se e solo se $k = 1$.
L'equazione della comune retta tangente nel punto $x_0 = 1$ è data da $y - 1 = 1\,(x-1)$ ovvero: $y = x$.

7) Data la funzione $f(x,y) = e^x\left(x^2 + y^2\right)$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(e^x\left(x^2+y^2\right) + 2x\,e^x; 2y\,e^x\right)$ ovvero:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(e^x\left(x^2+y^2+2x\right); 2y\,e^x\right)$ per cui:
$\begin{cases} e^x\,(x^2+y^2+2x) = 0 \\ 2y\,e^x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+2x = x\,(x+2) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ da cui:
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$. Abbiamo due punti stazionari: $(0,0)$ e $(-2,0)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^x\,(x^2+y^2+2x) + e^x\,(2x+2) & 2y\,e^x \\ 2y\,e^x & 2\,e^x \end{Vmatrix}$ ovvero:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} e^x\,(x^2+y^2+4x+2) & 2y\,e^x \\ 2y\,e^x & 2\,e^x \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo $\begin{cases} |\mathbb{H}_1(0,0)| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(0,0)| = 4 > 0 \end{cases}$, il punto $(0,0)$ è un punto di minimo; infine:
$\mathbb{H}(-2,0) = \begin{Vmatrix} e^{-2}\,(4-8+2) & 0 \\ 0 & 2\,e^{-2} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -2\,e^{-2} & 0 \\ 0 & 2\,e^{-2} \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$|\mathbb{H}_2(-2,0)| = -4\,e^{-4} < 0$, il punto $(-2,0)$ è un punto di sella.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & k \\ k & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ ed i vettori $\mathbb{X} = (1,0,1)$ e $\mathbb{Y} = (2,2,6)$, determinare se esiste un valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & k \\ k & 1 & 3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+0+1 \\ -1+0+k \\ k+0+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ k-1 \\ k+3 \end{Vmatrix}$ e quindi dovrà essere:
$\begin{Vmatrix} 2 \\ k-1 \\ k+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{Vmatrix}$ vera se e solo se $k = 3$.

9) Stabilire i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\ e\ (non\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A})$ supponendo per ipotesi che la proposizione $(non\ \mathbb{A}\ o\ \mathbb{B})$ sia falsa.

Poniamo per brevità $P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : non\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$non\ \mathbb{C}$	$P_2 : non\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}$	$P_1\ e\ P_2$	$non\ \mathbb{A}$	$non\ \mathbb{A}\ o\ \mathbb{B}$
1	1	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0	1	1

per cui, limitandoci alle righe dove la proposizione $(non\ \mathbb{A}\ o\ \mathbb{B})$ risulta falsa, avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$non\ \mathbb{C}$	$P_2 : non\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A}$	$P_1\ e\ P_2$	$non\ \mathbb{A}$	$non\ \mathbb{A}\ o\ \mathbb{B}$
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0

ovvero la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\ e\ (non\ \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A})$ risulta sempre falsa.

10) Determinare i primi due termini significativi del Polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \text{sen}\, x - e^{2x} + e^{3x}$.

Dato che: $f(0) = \text{sen}\, 0 - e^0 + e^0 = 0 - 1 + 1 = 0$;
$f'(x) = \cos x - 2e^{2x} + 3e^{3x}$ da cui $f'(0) = \cos 0 - 2e^0 + 3e^0 = 1 - 2 + 3 = 2$;
$f''(x) = -\text{sen}\, x - 4e^{2x} + 9e^{3x}$ da cui $f''(0) = -\text{sen}\, 0 - 4e^0 + 9e^0 = 0 - 4 + 9 = 5$;
per cui avremo il polinomio:
$P_3(x) = 2 \cdot x + \dfrac{5}{2!}\, x^2 = 2x + \dfrac{5}{2}\, x^2$ e quindi anche la formula :
$f(x) = \text{sen}\, x - e^{2x} + e^{3x} = 2x + \dfrac{5}{2}\, x^2 + o\left(x^2\right)$.