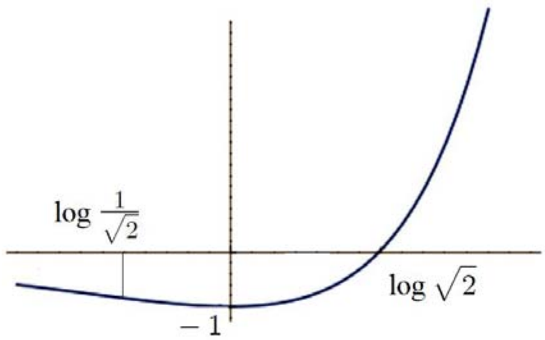
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 11/01/2024 - B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{4x} - 2e^{2x} = (0-0) = 0^-$ dato che e^{4x} è infinitesimo di ordine superiore rispetto a e^{2x};
$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{4x} - 2e^{2x} = (+\infty - \infty) = +\infty$ dato che e^{4x} è infinito di ordine superiore rispetto a e^{2x}.
$f(x) > 0$ per $e^{4x} - 2e^{2x} > 0 \Rightarrow e^{2x}\left(e^{2x} - 2\right) > 0 \Rightarrow e^{2x} > 2 \Rightarrow x > \frac{1}{2}\log 2 = \log\sqrt{2}$;
Ovviamente $f\left(\log\sqrt{2}\right) = \left(e^{\log\sqrt{2}}\right)^4 - 2\left(e^{\log\sqrt{2}}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4 = 0$.
$f'(x) = 4e^{4x} - 4e^{2x} = 4e^{2x}\left(e^{2x} - 1\right) > 0 \Rightarrow e^{2x} > 1 \Rightarrow x > 0$ e quindi la funzione è decrescente per $x < 0$, crescente per $x > 0$. Quindi in $x = 0$ abbiamo un punto di minimo assoluto con $f(0) = 1 - 2 = -1$.
Da $f'(x) = 4e^{4x} - 4e^{2x}$ avremo poi :
$f''(x) = 16e^{4x} - 8e^{2x} = 8e^{2x}\left(2e^{2x} - 1\right) > 0 \Rightarrow e^{2x} > \frac{1}{2} \Rightarrow x > \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$
e quindi: $f(x)$ è funzione concava per $x < \log\frac{1}{\sqrt{2}}$, convessa per $x > \log\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Nel punto $x = \log\frac{1}{\sqrt{2}}$ abbiamo un punto di flesso con:
$f\left(\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(e^{\log\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^4 - 2\left(e^{\log\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$.
Non ci sono asintoti obliqui.

Grafico:



$\log\sqrt{2} \approx 0,15 \quad \log\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0,15$

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cdot \operatorname{sen} x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x+2}\right)^{x-2}$.

a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos^2 x}{x\cdot\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x\cdot\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x+2}\right)^{x-2} = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{(-2)}{x+2}\right)^{x+2}\right]^{\frac{x-2}{x+2}} = \left(e^{-2}\right)^{1} = \dfrac{1}{e^{2}}$.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} 2x} = 3$.

Risulta $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kx}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} kx}{kx}\cdot\dfrac{kx}{2x}\cdot\dfrac{2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1\cdot\dfrac{k}{2}\cdot 1 = \dfrac{k}{2} = 3 \Rightarrow k = 6$.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{x-1}$ e $g(x) = 2x-3$, si determini l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, trovando anche dove queste ultime risultano invertibili nonchè l'espressione della loro inversa.

Risulta $f(g(x)) = f(2x-3) = 3^{2x-3-1} = 3^{2x-4}$.
Da $f(g(x)) = 3^{2x-4}$ avremo $[f(g(x))]' = 3^{2x-4}\cdot \log 3\cdot(2) > 0$ in tutto $\mathbb{R}$.
Quindi la funzione è invertibile in tutto $\mathbb{R}$.
Da $3^{2x-4} = y$ si ha $2x-4 = \log_3 y \Rightarrow 2x = \log_3 y + 4 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(\log_3 y + 4) \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \log_3\sqrt{y} + 2$ e quindi la funzione inversa di $f(g(x))$ sarà:
$[f(g(x))]^{-1} = y = \log_3\sqrt{x} + 2 = \log_3\sqrt{x} + \log_3 9 = \log_3 9\sqrt{x}$.
Risulta $g(f(x)) = g\left(3^{x-1}\right) = 2\cdot 3^{x-1} - 3$.
Da $g(f(x)) = 2\cdot 3^{x-1} - 3$ avremo $[g(f(x))]' = 2\cdot 3^{x-1}\cdot\log 3 > 0$ in tutto $\mathbb{R}$.
Quindi la funzione è invertibile in tutto $\mathbb{R}$.
Da $2\cdot 3^{x-1} - 3 = y$ si ha :
$2\cdot 3^{x-1} = y+3 \Rightarrow 3^{x-1} = \dfrac{y+3}{2} \Rightarrow x-1 = \log_3\dfrac{y+3}{2} \Rightarrow x = \log_3\dfrac{y+3}{2} + 1$ e quindi la funzione inversa di $g(f(x))$ sarà: $[g(f(x))]^{-1} = y = \log_3\dfrac{x+3}{2} + 1 = \log_3\dfrac{x+3}{2} + \log_3 3$ per avere infine $[g(f(x))]^{-1} = y = \log_3\dfrac{3(x+3)}{2}$.

5) Calcolare $\int_0^1 e^{3+x} + e^{-2x}\,\mathrm{d}x$.

Determinata una primitiva avremo:
$$\int_0^1 e^{3+x} + e^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left(e^{3+x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}\right|_0^1 = \left[e^{3+1} - \tfrac{1}{2}e^{-2}\right] - \left[e^{3} - \tfrac{1}{2}e^{0}\right] =$$
$$= \left(e^4 - \frac{1}{2e^2}\right) - \left(e^3 - \frac{1}{2}\right) = e^4 - e^3 - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}\,.$$

6) Date $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = k + \log x$, determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo tale che i grafici delle due funzioni abbiano la stessa retta tangente nel punto $x = 1$.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Per la funzione $f(x) = e^{x-1}$ si ha $f(1) = 1$; da $f'(x) = e^{x-1}$ si ha $f'(1) = 1$;
per la funzione $g(x) = k + \log x$ si ha $g(1) = k$; da $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ si ha $g'(1) = 1$.
Per avere la stessa retta tangente dovrà risultare :

$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = g(1) \\ f'(1) = g'(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = k \\ 1 = 1 \end{cases}$ ambedue vere se e solo se $k = 1$.
L'equazione della comune retta tangente nel punto $x_0 = 1$ è data da $y - 1 = 1\,(x - 1)$ ovvero: $y = x$.

7) Data la funzione $f(x,y) = e^y\left(x^2 + y^2\right)$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(2x\,e^y; e^y\left(x^2+y^2\right) + 2y\,e^y\right)$ ovvero:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(2x\,e^x; e^y\left(x^2+y^2+2y\right)\right)$ per cui:
$\begin{cases} 2x\,e^y = 0 \\ e^y\left(x^2+y^2+2y\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2+y^2+2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2y = y(y+2) = 0 \end{cases}$ da cui:
$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$. Abbiamo due punti stazionari: $(0,0)$ e $(0,-2)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2\,e^y & 2x\,e^y \\ 2x\,e^y & e^y\left(x^2+y^2+2y\right) + e^y\,(2y+2) \end{Vmatrix}$ ovvero:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 2\,e^y & 2x\,e^y \\ 2x\,e^y & e^y(x^2+y^2+4y+2) \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo $\begin{cases} |\mathbb{H}_1(0,0)| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(0,0)| = 4 > 0 \end{cases}$, il punto $(0,0)$ è un punto di minimo; infine:
$\mathbb{H}(0,-2) = \begin{Vmatrix} 2\,e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-2}\,(4-8+2) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2\,e^{-2} & 0 \\ 0 & -2\,e^{-2} \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$|\mathbb{H}_2(0,-2)| = -4\,e^{-4} < 0$, il punto $(0,-2)$ è un punto di sella.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ k & 3 & 1 \end{Vmatrix}$ ed i vettori $\mathbb{X} = (1,1,0)$ e $\mathbb{Y} = (2,2,5)$, determinare se esiste un valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ k & 3 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1+1+0 \\ 0+k+0 \\ k+3+0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ k \\ k+3 \end{Vmatrix}$ e quindi dovrà essere:
$\begin{Vmatrix} 2 \\ k \\ k+3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{Vmatrix}$ vera se e solo se $k = 2$.

9) Stabilire i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\ o\ (\mathbb{C} \Leftrightarrow non\ \mathbb{A})$ supponendo per ipotesi che la proposizione $(non\ \mathbb{A}\ e\ \mathbb{B})$ sia vera.

Poniamo per brevità $P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : \mathbb{C} \Leftrightarrow non\ \mathbb{A}$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$non\ \mathbb{A}$	$P_2 : \mathbb{C} \Leftrightarrow non \mathbb{A}$	$P_1 \, o \, P_2$	$non\ \mathbb{A}$	$non \mathbb{A} e \mathbb{B}$
1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	0

per cui, limitandoci alle righe dove la proposizione $(non\ \mathbb{A}\ e\ \mathbb{B})$ risulta vera, avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$	$non\ \mathbb{A}$	$P_2 : \mathbb{C} \Leftrightarrow non \mathbb{A}$	$P_1 \, o \, P_2$	$non\ \mathbb{A}$	$non \mathbb{A} e \mathbb{B}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1

ovvero la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\ o\ (\mathbb{C} \Leftrightarrow non\ \mathbb{A})$ risulta sempre vera.

10) Determinare i primi due termini significativi del Polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \cos x - 2e^x + e^{3x}$.

Dato che: $f(0) = \cos 0 - 2e^0 + e^0 = 1 - 2 + 1 = 0$;
$f'(x) = -\text{sen}\ x - 2e^x + 3e^{3x}$ da cui $f'(0) = -\text{sen}\ 0 - 2e^0 + 3e^0 = 0 - 2 + 3 = 1$;
$f''(x) = -\cos x - 2e^x + 9e^{3x}$ da cui $f''(0) = -\cos 0 - 2e^0 + 9e^0 = -1 - 2 + 9 = 6$;
per cui avremo il polinomio:
$P_2(x) = 1 \cdot x + \frac{6}{2!} x^2 = x + 3x^2$ e quindi anche la formula :
$f(x) = \cos x - 2e^x + e^{3x} = x + 3x^2 + o(x^2)$.