COMPITO di ANALISI MATEMATICA 8/02/2024

I M 1) Determinare tutti i numeri z tali che $e^z = 1 - i$.

Essendo $e^z = e^{x+iy} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$
da cui poi $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\,\mathrm{sen}\,y) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$
avremo $\begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{7\pi}{4} + k\cdot 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \log\sqrt{2} \\ y = \frac{7+8k}{4}\,\pi,\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow z = \log\sqrt{2} + i\,\frac{7+8k}{4}\,\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.
Abbiamo quindi infinite soluzioni.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{\varrho^{\frac{2}{3}}} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho^{\frac{4}{3}}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho^{\frac{4}{3}}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right| \le \varrho^{\frac{4}{3}} < \varrho < \varepsilon$, soddisfatta per $0<\varrho<\varepsilon$. La funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot 0}{\sqrt[3]{h^2+0}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0\cdot h}{\sqrt[3]{0+h^2}}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0.$$

Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} - 0 - (0,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}} = 0.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{6}}} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{(\varrho^2)^{\frac{5}{6}}} = \lim_{\varrho\to 0}\varrho^{2-\frac{5}{3}}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta =$$

$$= \lim_{\varrho\to 0}\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = \lim_{\varrho\to 0}\sqrt[3]{\varrho}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 0.$$

La convergenza è uniforme dato che $\left|\sqrt[3]{\varrho}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\right| \le \sqrt[3]{\varrho} < \varepsilon$, che risulta soddisfatta per $0<\varrho<\varepsilon^3$. La funzione è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y)=e^{x-y}-\log\dfrac{y}{x}-2x+1=0$ ed il punto $P_0=(1,1)$ che la soddisfa, determinare derivata prima e seconda per la funzione $y=y(x)$ definita implicitamente da tale equazione.

Dato che risulta $f(x,y)=e^{x-y}-\log\dfrac{y}{x}-2x+1=e^{x-y}-\log y+\log x-2x+1$, avremo il gradiente : $\nabla f(x,y)=\left(e^{x-y}+\dfrac{1}{x}-2;\,-e^{x-y}-\dfrac{1}{y}\right)$ da cui $\nabla f(1,1)=(0;\,-2)$; essendo $f'_y=-2\neq 0$ si può definire una funzione implicita $x\to y(x)$ con derivata prima: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)=-\dfrac{0}{-2}=0$.

Sarà poi $\mathbb{H}(x,y)=\left\|\begin{matrix} e^{x-y}-\frac{1}{x^2} & -e^{x-y} \\ -e^{x-y} & e^{x-y}+\frac{1}{y^2}\end{matrix}\right\|$ da cui $\mathbb{H}(1,1)=\left\|\begin{matrix} 0 & -1 \\ -1 & 2\end{matrix}\right\|$ per cui, dalla $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1)=-\dfrac{f''_{xx}+2f''_{xy}(y')+f''_{yy}(y')^2}{f'_y}$ avremo :

$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(1)=-\dfrac{0+2\cdot(-1)\cdot 0+2\cdot 0^2}{-2}=0$.

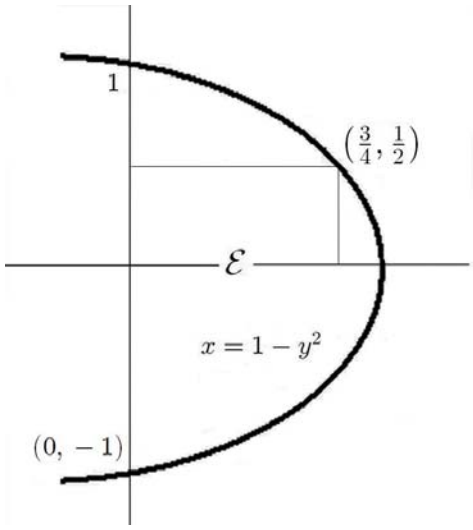
I M 4) Data $f(x,y)=y^2-x^2$ e $P_0=(2,\,-1)$, calcolare $\mathcal{D}_v f(P_0)$, dove v rappresenta la direzione che da P_0 porta nell'origine $(0,0)$.

Sia $\overline{v}=(v_1,v_2)$ la direzione che da $P_0=(2,\,-1)$ porta nell'origine $(0,0)$; dovrà quindi risultare: $(v_1,v_2)+(2,\,-1)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases} v_1+2=0 \\ v_2+(-1)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} v_1=-2 \\ v_2=1\end{cases}\Rightarrow\overline{v}=(-2,1)$.

Il versore v di $\overline{v}$ sarà allora $v=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

La funzione $f(x,y)=y^2-x^2$ è ovunque differenziabile, ed avremo quindi:
$\mathcal{D}_v f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot v$. Da $\nabla f(x,y)=(-2x;2y)$ avremo $\nabla f(2,\,-1)=(-4;\,-2)$ e quindi $\mathcal{D}_v f(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot v=(-4;\,-2)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{6}{\sqrt{5}}$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases}\text{Max/min } f(x,y)=x+y \\ \text{s.v.: }\begin{cases} x\leq 1-y^2 \\ x\geq 0\end{cases}\end{cases}$.



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x + y^2 - 1 \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1\big(x + y^2 - 1\big) - \lambda_2(-x)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \ne 0 \\ \Lambda'_y = 1 \ne 0 \\ x + y^2 - 1 \le 0 \\ -x \le 0 \end{cases}$: non ci sono soluzioni.

2) caso $\lambda_1 \ne 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x + y^2 - 1 = 0 \\ -x \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ y = \frac{1}{2} \\ x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ x \ge 0 : \text{ vera} \end{cases};$$

Il punto $P_1 : \left(\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$, con $\lambda_1 = 1 > 0$ potrebbe essere punto di massimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \ne 0$:

$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 \ne 0 \\ x = 0 \\ x + y^2 - 1 \le 0 \end{cases}$ non ci sono soluzioni.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x + y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{dato che} \begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \text{, avremo:}$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 y = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \lambda_2 = \lambda_1 - 1 = -\frac{1}{2} < 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

. Il punto $(0,1)$ non è nulla.

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 1 - 2\lambda_1 y = 0 = 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} < 0 \\ \lambda_2 = \lambda_1 - 1 = -\frac{3}{2} < 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Il punto $P_2 : (0, -1)$ con $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2} < 0$ e $\lambda_2 = -\dfrac{3}{2} < 0$ potrebbe essere un punto di minimo.

Essendo emersi due soli candidati, il punto $P_1 : \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$, con $f\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ sarà il punto di massimo mentre $P_2 : (0, -1)$, con $f(0, -1) = -1$ sarà il punto di minimo.

II M 2) Determinare, al variare del parametro k, la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 - kxy + y^2$.

La funzione, essendo un polinomio, è differenziabile di ogni ordine in tutto $\mathbb{R}^2$.
Imponendo le condizioni del I ordine avremo:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - ky, 2y - kx\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - ky = 0 \\ 2y - kx = 0 \end{cases} \text{ e quindi:}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - k\frac{kx}{2} = 0 \\ y = \frac{kx}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\left(3x - \frac{k^2}{2}\right) = 0 \\ y = \frac{kx}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{k^2}{6} \\ y = \frac{k^3}{12} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi due punti stazionari: $(0,0)$ e $\left(\frac{k^2}{6}, \frac{k^3}{12}\right)$.

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix}$ risulterà, supponendo $k \neq 0$:

$\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = -k^2 < 0$ per cui $(0,0)$ è punto di sella;

$\mathbb{H}\left(\frac{k^2}{6}, \frac{k^3}{12}\right) = \begin{Vmatrix} k^2 & -k \\ -k & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} |\mathbb{H}_1| = k^2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2| = 2k^2 - k^2 > 0 \end{cases}$ da cui $\left(\frac{k^2}{6}, \frac{k^3}{12}\right)$ punto di minimo.

Se fosse invece $k = 0$ avremmo $f(x,y) = x^3 + y^2$ e quindi:

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2, 2y\right) \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Essendo $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$ risulta $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \Rightarrow |\mathbb{H}_2| = 0$ e nulla si può dire.

Da $f(x,y) = x^3 + y^2$ segue $f(0,0) = 0$.

Se $x = 0$ abbiamo $f(0, y) = y^2 > 0$ se $y \neq 0$; se $y = 0$ abbiamo $f(x, 0) = x^3$ per cui si ha $f(x, 0) = x^3 < 0$ per $x < 0$ mentre $f(x, 0) = x^3 > 0$ per $x > 0$. In ogni intorno di $(0, 0)$ ci sono punti (x, y) per i quali $f(x, y) > f(0, 0)$ e punti per i quali $f(x, y) < f(0, 0)$, e quindi $(0, 0)$ è punto di sella.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + t^2 \\ y' = x - y \end{cases}$.

Da $\begin{cases} x' = x + y + t^2 \\ y' = x - y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - y = t^2 \\ -x + y' + y = 0 \end{cases}$ e passando alla forma matriciale si ha:

$\begin{Vmatrix} D - 1 & -1 \\ -1 & D + 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x \\ y \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} t^2 \\ 0 \end{Vmatrix}$, dalla quale, passando ai determinanti:

$\begin{vmatrix} D - 1 & -1 \\ -1 & D + 1 \end{vmatrix} (x) = \begin{vmatrix} t^2 & -1 \\ 0 & D + 1 \end{vmatrix}$ e quindi:

$((D - 1)(D + 1) - 1)(x) = (D + 1)\left(t^2\right)$ e quindi:

$\left(D^2 - 2\right)(x) = 2t + t^2$ ovvero $x'' - 2x = 2t + t^2$.

$\lambda^2 - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà:

$x(t) = c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t}$. Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea poniamo $x_0 = a\, t^2 + bt + c$. Quindi:

$x_0' = 2a\, t + b$ e $x_0'' = 2a$ e andando a sostituire nella $x'' - 2x = 2t + t^2$ si ha:

$2a - 2\left(a\, t^2 + bt + c\right) = 2t + t^2$ e quindi:

$-2a\, t^2 - 2bt + 2a - 2c = 2t + t^2$ e quindi:

$\begin{cases} -2a = 1 \\ -2b = 2 \\ 2a - 2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -1 \\ c = a = -\frac{1}{2} \end{cases}$ e quindi la soluzione generale sarà data da:

$x(t) = c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} - \dfrac{1}{2}\, t^2 - t - \dfrac{1}{2}$.

Dalla $x' = x + y + t^2$ otteniamo $y = x' - x - t^2$ e quindi:

$y(t) = c_1 \sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}t} - c_2 \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}t} - t - 1 - c_1\, e^{\sqrt{2}t} - c_2\, e^{-\sqrt{2}t} + \dfrac{1}{2}\, t^2 + t + \dfrac{1}{2} - t^2$

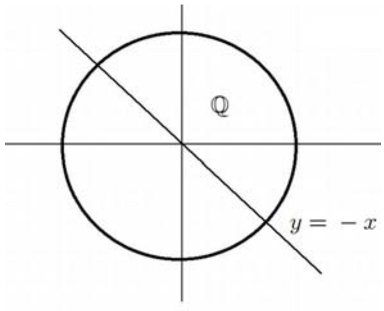
e quindi: $y(t) = c_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{\sqrt{2}t} - c_2 \left(\sqrt{2} + 1\right) e^{-\sqrt{2}t} - \dfrac{1}{2}\, t^2 - \dfrac{1}{2}$.

La soluzione generale del sistema sarà quindi:

$$\begin{cases} x(t) = c_1\, e^{\sqrt{2}t} + c_2\, e^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}\, t^2 - t - \frac{1}{2} \\ y(t) = c_1 \left(\sqrt{2} - 1\right) e^{\sqrt{2}t} - c_2 \left(\sqrt{2} + 1\right) e^{-\sqrt{2}t} - \frac{1}{2}\, t^2 - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\, y^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y + x\, ; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Vista la regione di integrazione:



$\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon -x \le y\,; x^2+y^2 \le 1\right\}$ avremo, passando a coordinate polari:

$$\iint_{\mathbb{Q}} x\,y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \varrho^3 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}^2\,\vartheta \cdot \varrho\;\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta \; = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^1 \left(\varrho^4 \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\;\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\vartheta \; =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta \left(\frac{\varrho^5}{5}\right|_0^1 \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{5}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \Rightarrow \frac{1}{5}\int \mathrm{sen}^2\,\vartheta\;\mathrm{d}(\mathrm{sen}\,\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3\,\vartheta\right|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{15}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \frac{1}{15}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{15\,\sqrt{2}}\,.$$