COMPITO di MATEMATICA GENERALE 8/02/2024 - A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log^2 x - 3\log x + 2$.

C.E.: $x > 0$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}^*_+$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \log^2 x - 3\log x + 2 = (+\infty + \infty + 2) = +\infty$;

$\lim\limits_{x\to +\infty} \log^2 x - 3\log x + 2 = \lim\limits_{x\to +\infty} \log x \left(\log x - 3 + \dfrac{2}{\log x}\right) = +\infty(+\infty) = +\infty$.

$f(x) = \log^2 x - 3\log x + 2 = (\log x - 1)(\log x - 2) > 0 \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} \log x > 1 \\ \log x > 2 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} x > e \\ x > e^2 \end{matrix} \right.$:

	0	e	e^2
$x > e$	$- - - -$		
$x > e^2$	$- - - -$	$- - - - -$	
	$(+)$	$(-)$	$(+)$

la funzione è positiva per $0 < x < e$ e per $x > e^2$, negativa per $e < x < e^2$;

$f(e) = f(e^2) = 0$.

$f'(x) = 2\log x \cdot \dfrac{1}{x} - 3 \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} \cdot (2\log x - 3) > 0 \Rightarrow \log x > \dfrac{3}{2} \Rightarrow x > e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$;

quindi la funzione è decrescente per $0 < x < e\sqrt{e}$, crescente per $x > e\sqrt{e}$.

Quindi in $x = e\sqrt{e}$, con $f(e\sqrt{e}) = \dfrac{9}{4} - 3 \cdot \dfrac{3}{2} + 2 = 2 - \dfrac{9}{4} = -\dfrac{1}{4}$ abbiamo un punto di minimo assoluto.

Da $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot (2\log x - 3)$ avremo poi :

$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} \cdot (2\log x - 3) + \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{2}{x} = \dfrac{1}{x^2} \cdot (5 - 2\log x) > 0 \Rightarrow \log x < \dfrac{5}{2} \Rightarrow 0 < x < e^{\frac{5}{2}}$

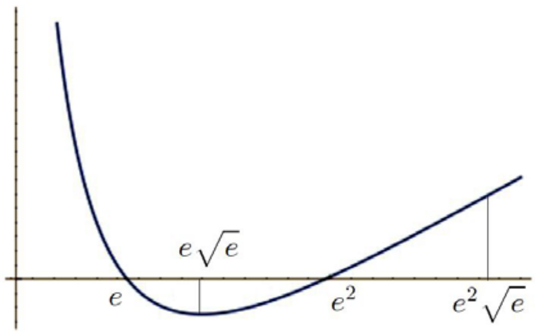
Quindi: $f(x)$ è funzione convessa per $0 < x < e^{\frac{5}{2}} = e^2\sqrt{e}$, concava per $x > e^2\sqrt{e}$.

Nel punto $x = e^2\sqrt{e}$ abbiamo un punto di flesso con:

$f(e^2\sqrt{e}) = \dfrac{25}{4} - 3 \cdot \dfrac{5}{2} + 2 = \dfrac{25}{4} - \dfrac{30}{4} + 2 = 2 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\log^2 x - 3\log x + 2}{x} = 0$.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(1+x)^3} - 1}{e^x - 1}$; $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 5}$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}-1}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{3}{2}}-1}{x}\cdot\dfrac{x}{e^x-1}=\dfrac{3}{2}\cdot 1=\dfrac{3}{2}\,.$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2+x-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty\,.$

3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:

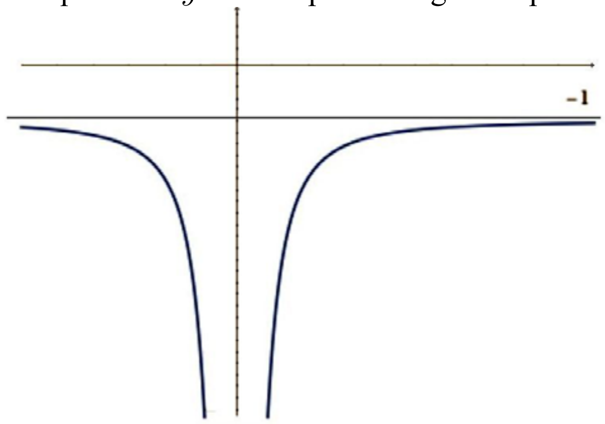
a) $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon):0<|x|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)<\varepsilon\,;$

b) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon):x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)+1|<\varepsilon\,.$

a) $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon):0<|x|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)<\varepsilon$ significa $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty\,;$

b) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon):x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)+1|<\varepsilon$ significa $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-1\,.$

Quindi abbiamo il grafico di una funzione con un asintoto verticale in $x=0$ ed un asintoto orizzontale sulla destra di equazione $y=-1$ per cui il grafico potrebbe essere come questo:



4) Data la funzione $f(x)=\dfrac{x+2}{x-3}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x)=f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

Risulta $F(x)=f(f(x))=\dfrac{f(x)+2}{f(x)-3}=\dfrac{\frac{x+2}{x-3}+2}{\frac{x+2}{x-3}-3}=\dfrac{\frac{x+2+2x-6}{x-3}}{\frac{x+2-3x+9}{x-3}}=\dfrac{3x-4}{11-2x}\,.$

Da $F(x)=\dfrac{3x-4}{11-2x}=y$ avremo $3x-4=y\,(11-2x)$ da cui $x\,(2y+3)=11y+4$ ed infine: $x=\dfrac{11y+4}{2y+3}$ e la funzione inversa sarà $y=F^{-1}(x)=\dfrac{11x+4}{2x+3}\,.$

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 x\,e^{2x}-2\,x^3\,\mathrm{d}x\,.$

Determiniamo una primitiva $(k=0)$ ed avremo, integrando per parti il primo integrale:

$$\int x\,e^{2x}-2\,x^3\,\mathrm{d}x=\int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x-2\int x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\,x\,e^{2x}-\int 1\cdot\frac{1}{2}\,e^{2x}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{4}\,x^4=$$

$$=\frac{1}{2}\,x\,e^{2x}-\frac{1}{4}\,e^{2x}-\frac{1}{2}\,x^4\Rightarrow\int_0^1 x\,e^{2x}-2\,x^3\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\,x\,e^{2x}-\frac{1}{4}\,e^{2x}-\frac{1}{2}\,x^4\right|_0^1=$$

$$=\left[\frac{1}{2}\,e^2-\frac{1}{4}\,e^2-\frac{1}{2}\right]-\left[0-\frac{1}{4}-0\right]=\frac{1}{4}\,e^2-\frac{1}{4}\,.$$

6) Verificare se e dove la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ risulta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Da $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ segue $f'(x) = 3x^2 + 6x - 7$.
Il suo coefficiente angolare è dato da $f'(x_0)$ e due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, per cui dovrà essere $f'(x_0) = 3x_0^2 + 6x_0 - 7 = 2$ ovvero:
$3x_0^2 + 6x_0 - 9 = 3\left(x_0^2 + 2x_0 - 3\right) = 3\,(x_0 - 1)(x_0 + 3) = 0$ ed avremo quindi due possibili soluzioni: $x_0 = 1$ e $x_0 = -3$.
Per $x_0 = 1$ avremo $f(1) = 1 + 3 - 7 + 1 = -2$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x_0 = 1$ sarà: $y + 2 = 2\,(x - 1)$ ovvero $y = 2x - 4$;
per $x_0 = -3$ avremo $f(-3) = -27 + 27 + 21 + 1 = 22$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x_0 = -3$ sarà: $y - 22 = 2\,(x + 3)$ ovvero $y = 2x + 28$.

7) Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy - y$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x, y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(2x + 2y; 3y^2 + 2x - 1\right)$ per cui:
$$\begin{cases} 2x + 2y = 2\,(x + y) = 0 \\ 3y^2 + 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ 3y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = \frac{1 \pm 2}{3} \end{cases}$$
da cui: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$.
Abbiamo due punti stazionari: $(-1, 1)$ e $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6y \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(-1, 1) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(-1, 1)| = 2 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(-1, 1)| = 12 - 4 > 0 \end{cases}$, il punto $(-1, 1)$ è un punto di minimo; infine:
$\mathbb{H}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \begin{Vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right| = -4 - 4 < 0$, il punto $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella.

8) Data $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{Vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 + 1 - 2k \\ 1 + k - 2 \\ k + 1 - 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 2 - 2k \\ k - 1 \\ k - 1 \end{Vmatrix}$ e quindi, affinchè il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}$ il loro prodotto scalare dovrà essere uguale a zero, per cui:

$(2-2k, k-1, k-1) \cdot (2, -1, 1) = 4-4k-k+1+k-1 = 4-4k = 0 \Rightarrow k = 1$.

9) Determinare quando risulta falsa la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulti vera.

Poniamo per brevità $P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$P_2 : \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$	$P_1 o P_2$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1

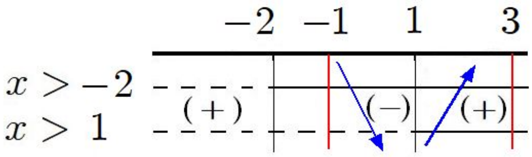
per cui, limitandoci alla sola riga dove la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ risulta falsa mentre la proposizione $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulta vera, avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1 : \mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}$	$P_2 : \mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C}$	$P_1 o P_2$	$\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$
1	0	1	0	0	0	1

ovvero la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})\, o\, (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ risulta falsa quando la proposizione $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulta vera solo nel caso che $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ siano vere mentre $\mathbb{B}$ è falsa.

10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ nell'intervallo $[-1, 3]$.

La funzione è un polinomio, per cui è continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi in $[-1, 3]$. Per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti.
Da $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ otteniamo $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6\left(x^2 + x - 2\right)$.
Quindi $f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 > 0$. Ma $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ e quindi:



$f'(x) < 0$ per $-1 < x < 1$ e quindi funzione decrescente;
$f'(x) > 0$ per $1 < x < 3$ e quindi funzione crescente.
In $x = 1$ abbiamo il punto di minimo assoluto, con $f(1) = 2 + 3 - 12 + 7 = 0$;
in $x = -1$ e in $x = 3$ abbiamo due punti di massimo; essendo:
$f(-1) = -2 + 3 + 12 + 7 = 20$ mentre $f(3) = 54 + 27 - 36 + 7 = 52$, in $x = 3$ abbiamo il punto di massimo assoluto, mentre in $x = -1$ un punto di massimo relativo.