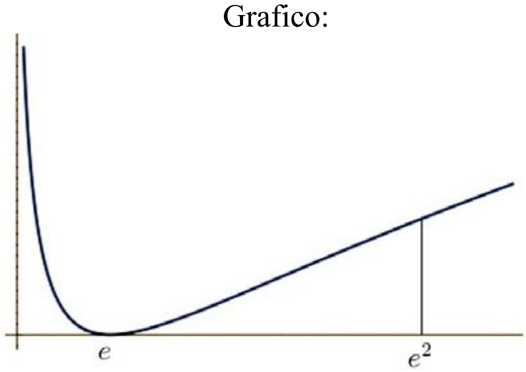
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 8/02/2024 - B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log^2 x - 2\log x + 1$.

C.E.: $x > 0$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}_+^*$.
Inoltre $f(x) = \log^2 x - 2\log x + 1 = (\log x - 1)^2$.
$\lim_{x\to 0^+} (\log x - 1)^2 = (\to(-\infty))^2 = +\infty$;
$\lim_{x\to +\infty} (\log x - 1)^2 = (\to(+\infty))^2 = +\infty$. $f(x) = (\log x - 1)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
$f(x) = 0$ per $\log x - 1 = 0 \Rightarrow \log x = 1 \Rightarrow x = e$.
$f'(x) = 2(\log x - 1) \cdot \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow \log x - 1 > 0 \Rightarrow \log x > 1 \Rightarrow x > e$;
quindi la funzione è decrescente per $0 < x < e$, crescente per $x > e$.
Quindi in $x = e$, con $f(e) = 0$ abbiamo un punto di minimo assoluto.
Da $f'(x) = 2(\log x - 1) \cdot \frac{1}{x}$ avremo poi :
$$f''(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} + 2(\log x - 1) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} \cdot (1 - \log x + 1) = \frac{2}{x^2} \cdot (2 - \log x) > 0$$
per $2 - \log x > 0 \Rightarrow \log x < 2 \Rightarrow 0 < x < e^2$.
Quindi: $f(x)$ è funzione convessa per $0 < x < e^2$, concava per $x > e^2$.
Nel punto $x = e^2$ abbiamo un punto di flesso con:
$f(e^2) = (\log e^2 - 1)^2 = (2-1)^2 = 1$.
Non ci sono asintoti obliqui in quanto $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log x - 1)^2}{x} = 0.$

Grafico:



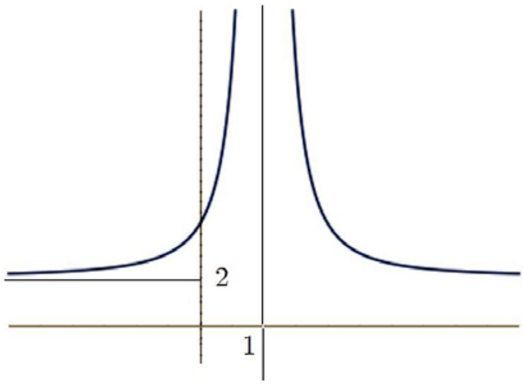
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^2} - 1}{\operatorname{sen} x} \ ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 7 + x^4} .$$

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^2} - 1}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{5}} - 1}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen} x} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$.
b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 7 + x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$.

3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:
a) $\forall \varepsilon \ \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;

b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

a) $\forall \varepsilon \; \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x-1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ significa $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty$;
b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ significa $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.
Quindi abbiamo il grafico di una funzione con un asintoto verticale in $x = 1$ ed un asintoto orizzontale sulla sinistra di equazione $y = 2$ per cui il grafico potrebbe essere come questo:



4) Data la funzione $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x) = f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

Risulta $F(x) = f(f(x)) = \dfrac{f(x)+1}{f(x)-2} = \dfrac{\frac{x+1}{x-2}+1}{\frac{x+1}{x-2}-2} = \dfrac{\frac{x+1+x-2}{x-2}}{\frac{x+1-2x+4}{x-2}} = \dfrac{2x-1}{5-x}$.
Da $F(x) = \dfrac{2x-1}{5-x} = y$ avremo $2x - 1 = y\,(5-x)$ da cui $x\,(y+2) = 5y+1$ ed infine: $x = \dfrac{5y+1}{y+2}$ e la funzione inversa sarà $y = F^{-1}(x) = \dfrac{5x+1}{x+2}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 2x^2 + x\,e^{3x}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva $(k = 0)$ ed avremo, integrando per parti il secondo integrale:
$\displaystyle\int 2x^2 + x\,e^{3x}\,\mathrm{d}x = \int 2x^2\,\mathrm{d}x + \int x\,e^{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \int 1 \cdot \frac{1}{3}e^{3x}\,\mathrm{d}x =$
$\displaystyle= \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} \Rightarrow \int_0^1 2x^2 + x\,e^{3x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x\,e^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x}\right|_0^1 =$
$\displaystyle= \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}e^3\right] - \left[0 + 0 - \frac{1}{9}\right] = \frac{2}{9}e^3 + \frac{7}{9}$.

6) Verificare se e dove la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x$ risulta parallela alla retta di equazione $y = 4x - 1$.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Da $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x$ segue $f'(x) = 3x^2 - 6x - 5$.
Il suo coefficiente angolare è dato da $f'(x_0)$ e due rette sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare, per cui dovrà essere $f'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0 - 5 = 4$ ovvero:
$3x_0^2 - 6x_0 - 9 = 3\left(x_0^2 - 2x_0 - 3\right) = 3\,(x_0 - 3)(x_0 + 1) = 0$ ed avremo quindi due possibili soluzioni: $x_0 = 3$ e $x_0 = -1$.

Per $x_0 = 3$ avremo $f(3) = 27 - 27 - 15 = -15$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x_0 = 3$ sarà: $y + 15 = 4(x-3)$ ovvero $y = 4x - 27$;
per $x_0 = -1$ avremo $f(-1) = -1 - 3 + 5 = 1$ e quindi l'equazione della retta tangente in $x_0 = -1$ sarà: $y - 1 = 4(x+1)$ ovvero $y = 4x + 5$.

7) Data la funzione $f(x,y) = x^3 + y^2 - x + 2xy$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(3x^2 + 2y - 1; 2y + 2x\right)$ per cui:
$$\begin{cases} 3x^2 + 2y - 1 = 0 \\ 2y + 2x = 2(x+y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm 2}{3} \\ y = -x \end{cases}$$
da cui: $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$.
Abbiamo due punti stazionari: $(1, -1)$ e $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
Essendo poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$, avremo:
$\mathbb{H}(1, -1) = \begin{Vmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(1, -1)| = 6 > 0 \\ |\mathbb{H}_2(1, -1)| = 12 - 4 > 0 \end{cases}$, il punto $(1, -1)$ è un punto di minimo; infine:
$\mathbb{H}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \begin{Vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :
$\left|\mathbb{H}_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right| = -4 - 4 < 0$, il punto $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella.

8) Data $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{Vmatrix}$, determinare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k + 2 - 1 \\ 1 + 2k - 1 \\ 1 + 2 - k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k + 1 \\ 2k \\ 3 - k \end{Vmatrix}$ e quindi, affinchè il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti perpendicolare al vettore $\mathbb{Y}$ il loro prodotto scalare dovrà essere uguale a zero, per cui:
$(k + 1, 2k, 3 - k) \cdot (1, -1, 1) = k + 1 - 2k + 3 - k = 4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$.

9) Determinare quando risulta falsa la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ risulti vera.

Poniamo per brevità $P_1 : \mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}$ e $P_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C}$	$P_1 e P_2$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1

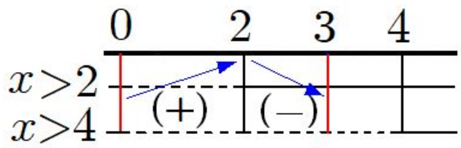
per cui, limitandoci alle righe dove la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ risulta vera, avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$P_1:\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_2:\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C}$	$P_1 e P_2$	$\mathbb{A}\Leftrightarrow\mathbb{C}$
1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1

ovvero la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B})\, e\, (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulta falsa quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono vere e $\mathbb{B}$ è falsa oppure quando $\mathbb{A}$ e $\mathbb{C}$ sono false e $\mathbb{B}$ è vera.

10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ nell'intervallo $[0,3]$.

La funzione è un polinomio, per cui è continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi in $[0,3]$. Per il Teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti.
Da $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ otteniamo $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3\left(x^2 - 6x + 8\right)$.
Quindi $f'(x) > 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 > 0$. Ma $x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x-4)$ e quindi:



$f'(x) > 0$ per $0 < x < 2$ e quindi funzione crescente;
$f'(x) < 0$ per $2 < x < 3$ e quindi funzione decrescente.
In $x = 2$ abbiamo il punto di massimo assoluto, con $f(2) = 8 - 36 + 48 - 10 = 10$;
in $x = 0$ e in $x = 3$ abbiamo due punti di minimo; essendo:
$f(0) = -10$ mentre $f(3) = 27 - 81 + 72 - 10 = 8$, in $x = 0$ abbiamo il punto di minimo assoluto, mentre in $x = 3$ un punto di minimo relativo.