COMPITI DI ANALISI MATEMATICA
AA. 2023/24

Prova Intermedia 2023

I M 1) Calcolare le radici quadrate del numero $z = \dfrac{1}{1+i} - \dfrac{2i-1}{3-i}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, verificare che essa risulta continua in $(0,0)$, determinando poi, mediante la definizione, se in tale punto essa ammette le derivate parziali e se risulta differenziabile.

I M 3) Data $f(x,y) = x^2 - y^2$, siano u e v i versori di $(1,1)$ e di $(1,-1)$. Sapendo che $\mathcal{D}_u f(\mathrm{P}_0) = \sqrt{2}$ e che $\mathcal{D}_v f(\mathrm{P}_0) = 2\sqrt{2}$, determinare P_0 e calcolare poi $\mathcal{D}^2_{u,v} f(\mathrm{P}_0)$.

I M 4) Verificare che con l'equazione $f(x,y,z) = ye^x - 2xe^z + ze^y = 0$, soddisfatta nel punto $P = (1,1,1)$, si può definire implicitamente una funzione $z = z(x,y)$, della quale determinare poi $\mathrm{d}z$ e $\mathrm{d}^2 z$.

I M 5) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x^3y^2 + y^2z^2 - xyz - x = 0 \\ g(x,y,z) = e^{x-z} - e^{y-z} = 0 \end{cases}$, ed i punti $\mathrm{P}_0 = (0,0,0)$ e $\mathrm{P}_1 = (1,1,1)$, determinare con quale dei due si possa definire una funzione implicita $y \to (x,z)$ e di questa calcolare il vettore tangente nel punto opportuno.

I Appello Sessione Invernale 2024

I M 1) Se $z = 1 - \sqrt{3}\,i$, calcolare $\sqrt{z^3}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta differenziabile in $(0,0)$, si calcoli, usando la definizione, $\mathcal{D}_v f(0,0)$, dove v è il versore di $(1,1)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = x^4y - y^3x = 0$ ed il punto $P_0 = (1,1)$ che la soddisfa, determinare l'espressione del polinomio di Taylor di II grado della funzione implicita $x \to y(x)$ da questa definita.

I M 4) Data $f(x,y) = e^x - e^y$, sia v il versore di $(1,1)$. Si verifichi che se in un punto (x,y) risulta $\mathcal{D}_v f(x,y) = 0$, allora risulta anche $\mathcal{D}^2_{v,v} f(x,y) = 0$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x+y \\ \text{s.v.: } x^2+4y^2 \leq 1 \end{cases}$.

II M 2) Data $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$, studiare la natura dei suoi punti stazionari.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 2e^x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2x - x^2\right\}$.

II Appello Sessione Invernale 2024

I M 1) Determinare tutti i numeri z tali che $e^z = 1 - i$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

I M 3) Data l'equazione $f(x,y) = e^{x-y} - \log \dfrac{y}{x} - 2x + 1 = 0$ ed il punto $P_0 = (1,1)$ che la soddisfa, determinare derivata prima e seconda per la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente da tale equazione.

I M 4) Data $f(x,y) = y^2 - x^2$ e $P_0 = (2,\,-1)$, calcolare $\mathcal{D}_v f(P_0)$, dove v rappresenta la direzione che da P_0 porta nell'origine $(0,0)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x \leq 1 - y^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$

II M 2) Determinare, al variare del parametro k, la natura dei punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^3 - kxy + y^2$.

II M 3) Risolvere il sistema di equazioni differenziali: $\begin{cases} x' = x + y + t^2 \\ y' = x - y \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} x\,y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y + x\,; x^2 + y^2 \leq 1\right\}$.

Appello Sessione Straordinaria I 2024

I M 1) Se una delle tre radici cubiche di un numero z risulta $z_1 = i$, determinare il numero z e calcolare poi le altre due radici cubiche di z.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x\,e^y + y\,e^z - 2e^x = 0 \\ g(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3 - xyz = 0 \end{cases}$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1,1,1)$ nel quale risulta soddisfatto, determinare se e quale tipo di funzione implicita si può con esso determinare nell'intorno di un punto opportuno e di questa calcolare le derivate prime.

I M 4) Data $f(x,y) = e^{y^2} - e^{x^2}$, calcolare $\mathcal{D}^2_{u,v} f(0,0)$, con u e v versori di $(1,1)$ e $(1,\,-1)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2 \end{cases}$.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq x\,; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.