

COMPITI DI MATEMATICA GENERALE AA. 2023/24

Prova Intermedia Anno 2023- Compito A1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x+5} \right)^x.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{1 - \log(1-x)}$.

3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = 2^x + 1$ e $h(x) = x - 2$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \circ \mathbb{C})$ sapendo che la proposizione \mathbb{B} è falsa.

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{2x+1} + k$ e $g(x) = \log(x-2)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito B1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1-x)}{\operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-1}{2x+2} \right)^x.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \frac{1}{\log_2(x-3) - 2}$.

3) Date le funzioni $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \frac{x-1}{x+2}$ e $h(x) = 2x+1$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \circ \mathbb{B}) \Leftrightarrow (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{B})$ sapendo che la proposizione \mathbb{C} è falsa.

5) Date le funzioni $f(x) = 2^{2-x} + 1$ e $g(x) = \log(x-k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito C1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{x+3} \right)^x.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \log(1 - \log(1-x))$.

3) Date le funzioni $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = \frac{2x}{x+1}$ e $h(x) = 2^x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{C} \wedge \mathbb{A})$ sapendo che la proposizione \mathbb{A} è vera.

5) Date le funzioni $f(x) = k + 2^{1+2x}$ e $g(x) = \log(2x - 3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 5.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito D1

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x(3^x - 1)}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 + 2x}{1 + 3x} \right)^x.$$

2) Determinare il campo d'esistenza della funzione $f(x) = \frac{\log x}{\log(1-x)}$.

3) Date le funzioni $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $g(x) = \log x$ e $h(x) = 3x$, determinare l'espressione della funzione composta $f(g(h(x)))$ e di questa determinare poi l'espressione della funzione inversa.

4) Date le tre generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , determinare i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ sapendo che la proposizione \mathbb{B} è vera.

5) Date le funzioni $f(x) = 3^{1-x}$ e $g(x) = \log(x - 2k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito A2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\operatorname{tg} x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + 3x}{1 + x} \right)^x.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \frac{3x}{x+2}$ e che $f(g(x)) = \frac{2x}{x+1}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x^2-4}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

4) Date le funzioni $f(x) = 2^{x+3} + k$ e $g(x) = \log(x-1)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 10.

5) Date le generiche proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} , \mathbb{C} e \mathbb{D} , costruire le tavole di verità della proposizione $[(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{D})] \Leftrightarrow (\mathbb{A} \vee \mathbb{D})$ sapendo che la proposizione \mathbb{B} è sempre vera mentre la proposizione \mathbb{D} è sempre falsa.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito B2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5+x}{6+x} \right)^x.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \frac{2x}{x+2}$ e che $f(g(x)) = \frac{x+1}{x+4}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{x+2} - 1$ e $g(x) = \log(x - k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 4.

5) Date le generiche proposizioni A, B, C e D, costruire le tavole di verità della proposizione $[(A \Leftrightarrow B) \vee (C \Leftrightarrow D)] \Rightarrow (A \wedge D)$ sapendo che la proposizione B è sempre falsa mentre la proposizione C è sempre vera.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito C2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^2 - 1}{\sin^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ e che $f(g(x)) = \frac{x-2}{2x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log\left(\frac{x}{x^2 + x - 2}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

4) Date le funzioni $f(x) = k + 3^{1+2x}$ e $g(x) = \log(2x - 3)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 6.

5) Date le generiche proposizioni A, B, C e D, costruire le tavole di verità della proposizione $[(A \vee B) \wedge (C \Leftrightarrow D)] \Leftrightarrow (C \Rightarrow B)$ sapendo che la proposizione A è sempre vera mentre la proposizione D è sempre falsa.

Prova Intermedia Anno 2023- Compito D2

1) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1-3x}{2-x}\right)^x.$$

2) Date le due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, sapendo che $f(x) = \frac{x+2}{1-x}$ e che $f(g(x)) = \frac{3x+1}{x}$, determinare la funzione $g(x)$ e poi l'espressione della sua inversa $g^{-1}(x)$.

3) Data la funzione $f(x) = \log_3\left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x}\right)$ se ne determini il campo d'esistenza.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{1+x}$ e $g(x) = \log(x - k)$, siano A il punto in cui $f(x)$ taglia l'asse delle ordinate, B quello in cui la funzione $g(x)$ taglia l'asse delle ascisse, sia O l'origine degli assi e sia k un parametro a valori reali positivi. Determinare il valore del parametro k in modo che il triangolo AOB abbia area uguale a 3.

5) Date le generiche proposizioni A, B, C e D, costruire le tavole di verità della proposizione $[(A \Leftrightarrow C) \vee (B \Rightarrow D)] \Rightarrow (C \wedge D)$ sapendo che la proposizione B è sempre vera mentre la proposizione A è sempre falsa.

I Appello Sessione Invernale 2024 - Compito A

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 2e^{3x} - 3e^{2x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x+1}\right)^{x-1}.$$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin kx} = 5$.

4) Date le funzioni $f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2^{1-x}$, si determini l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, trovando anche dove queste ultime risultano invertibili nonché l'espressione della loro inversa.

5) Calcolare $\int_0^1 e^{3x} - e^{-x} dx$.

6) Date $f(x) = e^{kx-1}$ e $g(x) = 1 + \log x$, determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo tale che i grafici delle due funzioni abbiano la stessa retta tangente nel punto $x = 1$.

7) Data la funzione $f(x, y) = e^x (x^2 + y^2)$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & k \\ k & 1 & 3 \end{vmatrix}$ ed i vettori $\mathbb{X} = (1, 0, 1)$ e $\mathbb{Y} = (2, 2, 6)$, determinare se esiste un valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

9) Stabilire i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B})$ e $(\text{non } \mathbb{C} \Rightarrow \mathbb{A})$ supponendo per ipotesi che la proposizione $(\text{non } \mathbb{A} \circ \mathbb{B})$ sia falsa.

10) Determinare i primi due termini significativi del Polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \sin x - e^{2x} + e^{3x}$.

I Appello Sessione Invernale 2024 - Compito B

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{4x} - 2e^{2x}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right)^{x-2}.$$

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\sin 2x} = 3$.

4) Date le funzioni $f(x) = 3^{x-1}$ e $g(x) = 2x - 3$, si determini l'espressione delle funzioni composte $f(g(x))$ e $g(f(x))$, trovando anche dove queste ultime risultano invertibili nonché l'espressione della loro inversa.

5) Calcolare $\int_0^1 e^{3+x} + e^{-2x} dx$.

6) Date $f(x) = e^{x-1}$ e $g(x) = k + \log x$, determinare, se possibile, il valore del parametro k in modo tale che i grafici delle due funzioni abbiano la stessa retta tangente nel punto $x = 1$.

7) Data la funzione $f(x, y) = e^y (x^2 + y^2)$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

- 8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & k & -1 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ed i vettori $\mathbb{X} = (1, 1, 0)$ e $\mathbb{Y} = (2, 2, 5)$, determinare se esiste un valore del parametro k per il quale risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.
- 9) Stabilire i casi di verità e di falsità della proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{C} \Leftrightarrow \text{non } \mathbb{A})$ supponendo per ipotesi che la proposizione $(\text{non } \mathbb{A} \wedge \mathbb{B})$ sia vera.
- 10) Determinare i primi due termini significativi del Polinomio di Mac Laurin della funzione $f(x) = \cos x - 2e^x + e^{3x}$.

II Appello Sessione Invernale 2024 - Compito A

- 1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log^2 x - 3 \log x + 2$.
- 2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(1+x)^3} - 1}{e^x - 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + x - 5}.$$
- 3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:
 a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) < \varepsilon$;
 b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) + 1| < \varepsilon$.
- 4) Data la funzione $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x) = f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.
- 5) Calcolare $\int_0^1 x e^{2x} - 2x^3 dx$.
- 6) Verificare se e dove la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ risulta parallela alla retta di equazione $y = 2x - 1$.
- 7) Data la funzione $f(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy - y$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.
- 8) Data $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, trovare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore \mathbb{Y} .
- 9) Determinare quando risulta falsa la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{B}) \vee (\mathbb{B} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulti vera.
- 10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ nell'intervallo $[-1, 3]$.

II Appello Sessione Invernale 2024 - Compito B

- 1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = \log^2 x - 2 \log x + 1$.
- 2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1+x)^2} - 1}{\sin x}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{x^3 + 7 + x^4}.$$
- 3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:
 a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : 0 < |x - 1| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;
 b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$.

4) Data la funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x) = f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

5) Calcolare $\int_0^1 2x^2 + x e^{3x} dx$.

6) Verificare se e dove la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x$ risulta parallela alla retta di equazione $y = 4x - 1$.

7) Data la funzione $f(x, y) = x^3 + y^2 - x + 2xy$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

8) Data $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$, trovare il valore del parametro k

per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta perpendicolare al vettore \mathbb{Y} .

9) Determinare quando risulta falsa la proposizione $(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{B}) \wedge (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ nell'ipotesi che la proposizione $(\mathbb{A} \Leftrightarrow \mathbb{C})$ risulti vera.

10) Determinare i punti di massimo e di minimo, sia assoluti che relativi, per la funzione $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ nell'intervallo $[0, 3]$.

Appello Sessione Straordinaria I 2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{2x-x^2}$.

2) Determinare il valore dei seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - \sin x}{x^2 - 2x + 3 \cos x}.$$

3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:

a) $\forall \varepsilon \exists \delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;

b) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon$.

4) Data la funzione $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x) = f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

5) Calcolare $\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

6) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ nel punto $x = 0$ e determinare poi l'area del triangolo nel primo quadrante avente per vertici i punti in cui tale retta taglia gli assi.

7) Data la funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2 - 4x - y^2$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

8) Dati $\mathbb{A} = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$, trovare il valore del parametro k per

il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore \mathbb{Y} .

9) Date tre proposizioni \mathbb{A} , \mathbb{B} e \mathbb{C} , costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\text{non } (\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})) \Leftrightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che una e solo una fra le tre proposizioni sia vera.

10) Determinare gli intervalli in cui risulta concava o convessa la funzione $f(x) = x^2 \log x$.