COMPITO di ANALISI MATEMATICA 18/03/2024

I M 1) Se una delle tre radici cubiche di un numero z risulta $z_1 = i$, determinare il numero z e calcolare poi le altre due radici cubiche di z.

Se $\sqrt[3]{z} = i \Rightarrow z = i^3 = i \cdot i^2 = -i$. Essendo $-i = 1\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right)$ avremo:
$\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\right),\ 0 \le k \le 2$.
se $k = 0 : \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) = i$;
se $k = 1 : \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}$;
se $k = 2 : \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\,\frac{1}{2}$.

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato se la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2}$ passando a coordinate polari:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^5 \cos^3\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^4} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\cos^3\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta = 0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\cos^3\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta\right| \le \varrho < \varepsilon$, soddisfatta per $0 < \varrho < \varepsilon$. La funzione è continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3\cdot 0}{(h^2+0^2)^2}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$;
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{0\cdot h^2}{(h^2+0^2)^2}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 0 = 0$.
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)$.
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0$ ovvero se:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2} - 0 - (0,0)\cdot(x,y)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, ovvero se
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Passando a coordinate polari otteniamo:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3\,y^2}{(x^2+y^2)^2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^5\cos^3\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta}{\varrho^5} = \cos^3\vartheta\,\text{sen}^2\,\vartheta = 0$ solo per particolari valori di ϑ. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Dato il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = x\,e^y + y\,e^z - 2e^x \ = 0 \\ g(x,y,z) = x^3 - y^3 + z^3 - xyz = 0 \end{cases}$ ed il punto $\mathrm{P}_0 = (1,1,1)$ nel quale risulta soddisfatto, determinare se e quale tipo di funzione implicita si può con esso determinare nell'intorno di un punto opportuno e di questa calcolare le derivate prime.

Costruiamo la matrice Jacobiana relativa a questo sistema; risulta:
$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \begin{Vmatrix} e^y - 2e^x & x\,e^y + e^z & y\,e^z \\ 3x^2 - yz & -3y^2 - xz & 3z^2 - xy \end{Vmatrix}$ e quindi:
$\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,1) = \begin{Vmatrix} -e & 2e & e \\ 2 & -4 & 2 \end{Vmatrix}$.
Dato che $\begin{vmatrix} -e & 2e \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 4e - 4e = 0$ non si può definire una funzione $z \to (x,y)$;
dato che $\begin{vmatrix} -e & e \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2e - 2e = -4e \neq 0$ si può definire una funzione $y \to (x,z)$;
dato che $\begin{vmatrix} 2e & e \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 4e + 4e = 8e \neq 0$ si può definire una funzione $x \to (y,z)$.
Se scegliamo quest'ultima avremo le derivate:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} -e & e \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e & e \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{-4e}{8e} = \frac{1}{2}\,;\ \ \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} 2e & -e \\ -4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2e & e \\ -4 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{4e - 4e}{8e} = 0\,.$$

I M 4) Data $f(x,y) = e^{y^2} - e^{x^2}$, calcolare $\mathcal{D}^2_{u,v} f(0,0)$, con u e v versori di $(1,1)$ e $(1,-1)$.

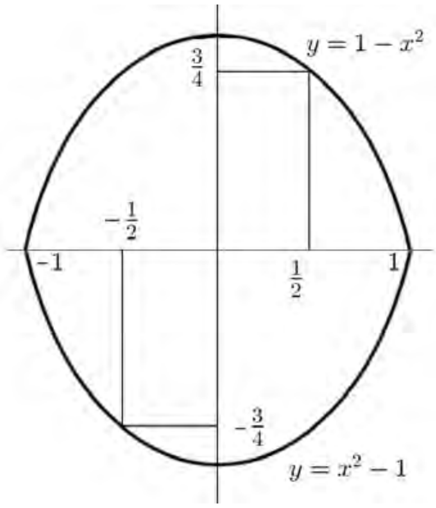
La funzione è palesemente differenziabile due volte in tutto $\mathbb{R}$ e quindi avremo:
$\mathcal{D}_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot u$ e $\mathcal{D}^2_{u,v} f(x_0,y_0) = u \cdot \mathbb{H}(x_0,y_0) \cdot v^T$.
Essendo $\nabla f(x,y) = \left(-2x\,e^{x^2}; 2y\,e^{y^2} \right)$ risulta:
$\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} (-4x^2 - 2)\,e^{x^2} & 0 \\ 0 & (4y^2 + 2)\,e^{y^2} \end{Vmatrix}$ e quindi $\mathbb{H}(0,0) = \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.
Risultando poi $u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ e $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ avremo infine:

$$\mathcal{D}^2_{u,v} f(0,0) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} \end{Vmatrix} = -2\,.$$

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } x^2 - 1 \le y \le 1 - x^2 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x^2 - y - 1 \le 0 \\ x^2 + y - 1 \le 0 \end{cases} \end{cases}$.

$\begin{cases} x^2 - y - 1 = 0 \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$, avendo sottratto dalla seconda equazione la prima equazione.



La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.
Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x + y - \lambda_1\big(x^2 - y - 1\big) - \lambda_2\big(x^2 + y - 1\big)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:
$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 \neq 0 \\ \Lambda'_y = 1 \neq 0 \\ x^2 - y - 1 \leq 0 \\ x^2 + y - 1 \leq 0 \end{cases}$: non ci sono soluzioni.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:
$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ x^2 + y - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1 \leq 0 : \text{ vera} \end{cases}$;
il punto $P_1 : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, con $\lambda_1 = -1 < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:
$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_2 x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 1 - x^2 \\ x^2 - y - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 1 \leq 0 : \text{ vera} \end{cases}$;
il punto $P_2 : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con $\lambda_2 = 1 > 0$ potrebbe essere punto di massimo.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda_1 x - 2\lambda_2 x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = x^2 - 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases}$$ dato che $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ y = 1 - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$, avremo:

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 2\lambda_1 - 2 - 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{4} < 0 \\ \lambda_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} > 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases};$$

il punto $(1, 0)$ non è nulla.

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2\lambda_1 + 2 + 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 + \lambda_1 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{3}{4} < 0 \\ \lambda_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} > 0 \\ x = -1 \\ y = 0 \end{cases};$$

il punto $(-1, 0)$ non è nulla.

Essendo emersi due soli candidati, il punto $P_1 : \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, con $f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) = -\frac{5}{4}$ sarà il punto di minimo mentre $P_2 : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, con $f\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{4}$ sarà il punto di massimo.

Volendo, tanto per completezza ma non certo per necessità, esaminare il comportamento sulla frontiera di $\mathcal{E}$, avremo:

- se $y = 1 - x^2 \Rightarrow f(x, 1 - x^2) = x + 1 - x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 - 2x > 0$ per $x < \frac{1}{2}$ e quindi in $x = \frac{1}{2}$ abbiamo un punto di massimo;
- se $y = 1 + x^2 \Rightarrow f(x, 1 + x^2) = x + 1 + x^2 \Rightarrow f'(x) = 1 + 2x > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$ e quindi in $x = -\frac{1}{2}$ abbiamo un punto di minimo.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$.

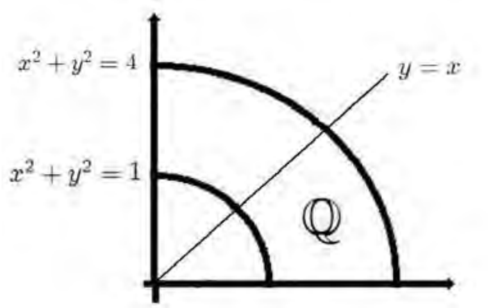
Si tratta di un'equazione differenziale a variabili separabili e quindi, da:
$y' = xy^2$ segue $\frac{1}{y^2} y' = x$, avendo posto $y \neq 0$. Osserviamo subito che la funzione $y = 0$ è comunque una soluzione, semplicemente sostituendola nell'equazione.
Da $\frac{1}{y^2} y' = x$ segue, integrando, $\int \frac{1}{y^2} y' \, dx = \int \frac{1}{y^2} \, dy = \int x \, dx + k$ e quindi:
$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + k = \frac{x^2 + 2k}{2}$ da cui $y = -\frac{2}{x^2 + 2k}$, che rappresenta la soluzione generale dell'equazione differenziale. La soluzione $y = 0$ si ottiene per $k \to \infty$ e rappresenta quindi una soluzione particolare.
Imponendo $y(1) = 1$ otteniamo $1 = -\frac{2}{1 + 2k} \Rightarrow 1 + 2k = -2 \Rightarrow 2k = -3 \Rightarrow k = -\frac{3}{2}$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà $y = -\frac{2}{x^2 - 3}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 2y' + y = x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea. Da $y'' - 2y' + y = 0$ otteniamo:
$\big(D^2 - 2D + 1\big)(y) = (D-1)^2(y) = 0$ ovvero $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà: $y(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, dato che il termine noto x è annichilato dall'operatore D^2, che non è presente nella fattorizzazione dell'equazione omogenea, ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $y_0 = ax + b$ per cui avremo:
$y_0' = a$ e $y_0'' = 0$ da cui sostituendo nella $y'' - 2y' + y = x$ otteniamo:
$0 - 2a + ax + b = x$ ovvero $ax - 2a + b = x$ da cui si ha:
$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare $y_0 = x + 2$ e quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $y(x) = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x + x + 2$.
Sarà poi, da $\begin{cases} y = c_1\, e^x + c_2\, x\, e^x + x + 2 \\ y' = (c_1 + c_2)e^x + c_2 x e^x + 1 \end{cases}$, imponendo le condizioni:
$\begin{cases} y(0) = c_1 + 2 = 1 \\ y'(0) = c_1 + c_2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare del problema di Cauchy sarà $y(x) = -e^x - x\, e^x + x + 2$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x\,; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\}$.

Vista la regione di integrazione:



$\mathbb{Q} = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x\,; 1 \le x^2 + y^2 \le 4\big\}$ avremo, passando a coordinate polari:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \varrho^2 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \cdot \varrho\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_1^2 \varrho^3 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \left(\frac{\varrho^4}{4}\bigg|_1^2\right) \mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(4 - \frac{1}{4}\right) \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta \Rightarrow \frac{15}{4} \int \mathrm{sen}\,\vartheta\ \mathrm{d}(\mathrm{sen}\,\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{15}{4}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\,\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{15}{8}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 0\right] = \frac{15}{16}\,.$$