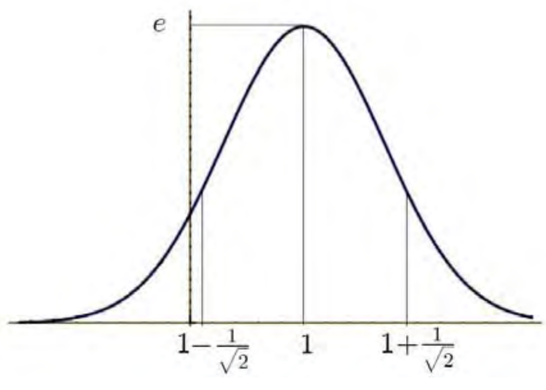
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 18/03/2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = e^{2x-x^2}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x-x^2} = e^{\to(-\infty)} = 0^+$.
La retta di equazione $y = 0$ è asintoto orizzontale sia sulla sinistra che sulla destra.
$f(x) = e^{2x-x^2} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}; f(0) = 1$.
$f'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x) = 2\,(1-x)\,e^{2x-x^2} > 0 \Rightarrow 1-x > 0 \Rightarrow x < 1$;
quindi la funzione è crescente per $x < 1$, decrescente per $x > 1$.
Quindi in $x = 1$, con $f(1) = e$ abbiamo un punto di massimo assoluto.
Da $f'(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)$ avremo poi :
$f''(x) = e^{2x-x^2} \cdot (2-2x)^2 + e^{2x-x^2} \cdot (-2) = e^{2x-x^2} \cdot \left(4x^2 - 8x + 2\right) > 0 \Rightarrow$
Quindi $f''(x) = 2\,e^{2x-x^2} \cdot \left(2x^2 - 4x + 1\right) > 0$ per $2x^2 - 4x + 1 > 0$;
da $x = \dfrac{2\pm\sqrt{4-2}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2} = 1\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ otteniamo che :
$f''(x) > 0$ per $x < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x > 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $f''(x) < 0$ per $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Per cui la funzione $f(x)$ è convessa per $x < 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e per $x > 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, concava per $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Nei punti $x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ e $x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ abbiamo due punti di flesso con:
$f\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{2-\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}+\sqrt{2}} = f\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{2+\sqrt{2}-1-\frac{1}{2}-\sqrt{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.
Non ci sono ovviamente asintoti obliqui .

Grafico:



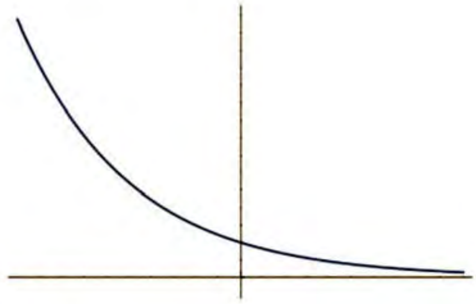
2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3 + x^2 - \operatorname{sen} x}{x^2 - 2x + 3\cos x}$.

a) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - 1 - \left(e^{-x^2} - 1\right)}{x^2} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1 + 1 = 2$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+x^2-\operatorname{sen}x}{x^2-2x+3\cos x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, in quanto per $x\to-\infty$ risulta: $x^2-\operatorname{sen}x=o\big(x^3\big)$ e $-2x+3\cos x=o\big(x^2\big)$.

3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:
a) $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon):x<\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)>\varepsilon$;
b) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon):x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow 0<f(x)<\varepsilon$.

a) $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon):x<\delta(\varepsilon)\Rightarrow f(x)>\varepsilon$ significa $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$;
b) $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta(\varepsilon):x>\delta(\varepsilon)\Rightarrow 0<f(x)<\varepsilon$ significa $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^+$.
Quindi abbiamo il grafico di una funzione con un asintoto orizzontale sulla destra di equazione $y=0$ mentre sulla sinistra la funzione tende a $+\infty$, per cui il grafico potrebbe essere simile a quello di una funzione esponenziale con base minore di 1, ovvero:



4) Data la funzione $f(x)=2-\dfrac{1}{x}$, dopo aver determinato l'espressione della funzione composta $F(x)=f(f(x))$, determinare poi l'espressione dell'inversa di $F(x)$.

Essendo $f(x)=2-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x-1}{x}$ avremo:
Risulta $F(x)=f(f(x))=\dfrac{2f(x)-1}{f(x)}=\dfrac{2\cdot\frac{2x-1}{x}-1}{\frac{2x-1}{x}}=\dfrac{\frac{4x-2-x}{x}}{\frac{2x-1}{x}}=\dfrac{3x-2}{2x-1}$.
Da $F(x)=\dfrac{3x-2}{2x-1}=y$ avremo $3x-2=y\,(2x-1)$ da cui $x\,(3-2y)=2-y$ ed infine: $x=\dfrac{2-y}{3-2y}$ e la funzione inversa sarà $y=F^{-1}(x)=\dfrac{x-2}{2x-3}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva ($k=0$), e ricordando che $D\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{x^2}$ avremo:
$\displaystyle\int x^2-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\int x^2\,\mathrm{d}x+\int-\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}$ e quindi:
$\displaystyle\int_1^2\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{x}\right|_1^2=\left[\frac{8}{3}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{3}+1\right]=\frac{19}{6}-\frac{4}{3}=\frac{11}{6}$.

6) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x + 1$ nel punto $x = 0$ e determinare poi l'area del triangolo nel primo quadrante avente per vertici i punti in cui tale retta taglia gli assi.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Da $f(x) = x^3 - 3x + 1$ segue $f(0) = 1$ e da $f'(x) = 3x^2 - 3$ segue $f'(0) = -3$.
L'equazione della retta tangente nel punto $x = 0$ sarà quindi data da:
$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Rightarrow y - 1 = -3x \Rightarrow y = -3x + 1$.
Da $y = -3x + 1$ posto $x = 0$ avremo $y = 1$ mentre sarà $y = 0$ se $1 - 3x = 0$ ovvero se $x = \frac{1}{3}$. I punti in cui la retta taglia gli assi sono $(0, 1)$ e $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$. Il triangolo che si determina è rettangolo con base pari ad $\frac{1}{3}$ ed altezza pari ad 1 e la sua area sarà $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$.

7) Data la funzione $f(x, y) = x^3 + 2x^2 - 4x - y^2$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x, y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(3x^2 + 4x - 4;\ -2y\right)$ per cui:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 4 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-2 \pm 4}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

da cui: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$.

Abbiamo due punti stazionari: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ e $(-2, 0)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{Vmatrix} 6x + 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{H}\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \begin{Vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{2}{3}, 0\right)\right| = -16 < 0$, il punto $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ è un punto di sella.

A tale conclusione si può arrivare anche semplicemente notando che le due derivate pure hanno segno diverso.

Sarà poi $\mathbb{H}(-2, 0) = \begin{Vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\begin{cases} |\mathbb{H}_1(-2, 0)| = -8 < 0 \\ |\mathbb{H}_2(-2, 0)| = 16 > 0 \end{cases}$, il punto $(-2, 0)$ è un punto di massimo.

8) Dati $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{Vmatrix}$, $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}$, trovare il valore del parametro k per il quale il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulta parallelo al vettore $\mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \begin{Vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k + 0 + 2 \\ 1 - k + 0 \\ 1 + 0 + 2k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} k + 2 \\ 1 - k \\ 2k + 1 \end{Vmatrix}$ e quindi, affinchè il vettore $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X}$ risulti parallelo al vettore $\mathbb{Y}$ dovrà risultare $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = m \cdot \mathbb{Y}$, ovvero:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = m \cdot \mathbb{Y} = (m, 0, m)$, e rapportando le sole componenti diverse da 0, otteniamo:

$\dfrac{1}{k+2} = \dfrac{1}{2k+1}$ sicuramente vera solo se $k = 1$ ed avremo i due vettori paralleli:
$\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = (3, 0, 3)$ e $\mathbb{Y} = (1, 0, 1)$, con $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = 3 \cdot \mathbb{Y}$.

9) Date tre proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(non\,(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})) \Leftrightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che una e solo una fra le tre proposizioni sia vera.

Poniamo per brevità $P_1 : (non\,(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}))$ e $P_2 : (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ e formiamo la tavola di verità:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}$	$P_1 : non\,(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})$	$P_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1	0

per cui, limitandoci alle sole righe (quarta, sesta e settima) dove una e solo una fra le tre proposizioni risulta vera, avremo:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C}$	$P_1 : non\,(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})$	$P_2 : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C}$	$P_1 \Leftrightarrow P_2$
1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0

ovvero la proposizione $(non\,(\mathbb{A} \Rightarrow \mathbb{C})) \Leftrightarrow (\mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{C})$ risulta falsa quando solo la proposizione $\mathbb{C}$ risulta vera, altrimenti, negli altri due casi, risulta vera.

10) Determinare gli intervalli in cui risulta concava o convessa la funzione $f(x) = x^2 \log x$.

La funzione è continua in tutto il suo campo di esistenza, ovvero per $x > 0$.
Essendo derivabile almeno due volte, basterà determinare il segno della sua derivata seconda per vedere dove la funzione risulta concava e dove convessa.
Da $f(x) = x^2 \log x$ otteniamo $f'(x) = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = 2x \log x + x$.
Da $f'(x) = 2x \log x + x$ otteniamo $f''(x) = 2 \log x + 2x \cdot \dfrac{1}{x} + 1 = 2 \log x + 3$.
Quindi $f''(x) = 2 \log x + 3 > 0$ per $\log x > -\dfrac{3}{2} \Rightarrow x > e^{-\frac{3}{2}} = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$.
Quindi la funzione è concava per $0 < x < \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$, convessa in $\dfrac{1}{e\sqrt{e}} < x$.
Ovvero la funzione è concava in $\left]0; \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right[$, convessa in $\left]\dfrac{1}{e\sqrt{e}}; +\infty\right[$.
Nel punto $x = \dfrac{1}{e\sqrt{e}}$ abbiamo un punto di flesso.