

COMPITO di ANALISI MATEMATICA 22/03/2023

I M 1) Data l'equazione $x^2 - 2x + k = 0$, sapendo che essa ammette la soluzione $x = 1 + i$, determinare il valore del parametro k e calcolare poi le radici cubiche dell'altra soluzione di tale equazione.

Sappiamo che, in una equazione polinomiale a coefficienti reali, se ci sono soluzioni complesse, queste sono sempre in numero pari, dato che per ogni soluzione complessa è presente anche la sua coniugata, che in questo caso sarà $x = 1 - i$, e di questa andranno trovate le radici cubiche. Prima, ricordando che il termine noto dell'equazione coincide con il prodotto delle soluzioni, troviamo il valore del parametro k , ed avremo $k = (1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$.

Infatti da $x^2 - 2x + 2 = 0$ otteniamo $x = 1 \pm \sqrt{1 - 2} = 1 \pm \sqrt{-1}$ per cui $x = 1 \pm i$.

Da $1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$ risulta:

$$\sqrt[3]{1 - i} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{7\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{7\pi}{12} + k \frac{2\pi}{3} \right) \right), 0 \leq k \leq 2. \text{ Per cui:}$$

Se $k = 0$: $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$;

Se $k = 1$: $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{15\pi}{12} + i \sin \frac{15\pi}{12} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$;

Per $k = 2$: $\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$.

I M 2) Data la funzione $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ k & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$, trovare il valore del parametro k per il quale la funzione risulta continua in $(0, 0)$, determinando poi, mediante la definizione, se in tale punto essa risulta anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2}$ passando a coordinate polari:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3 (\cos^3 \vartheta + \varrho \sin^4 \vartheta)}{\varrho^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho (\cos^3 \vartheta + \varrho \sin^4 \vartheta) = 0 ;$$

la convergenza è uniforme in quanto $|\varrho (\cos^3 \vartheta + \varrho \sin^4 \vartheta)| \leq |\varrho (1 + \varrho)| < \varepsilon$ che risulta soddisfatta per $0 < \varrho < \frac{\sqrt{1 + 4\varepsilon} - 1}{2}$. La funzione è continua in $(0, 0)$ se $k = f(0, 0) = 0$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{h^3 + 0}{h^2 + 0} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3}{h^3} = 1 ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{0 + h^4}{0 + h^2} - 0 \right) \cdot \frac{1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^4}{h^3} = 0 .$$

Quindi $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$.

Per la differenziabilità in $(0, 0)$ dobbiamo infine verificare se:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \nabla f(0, 0) \cdot (x - 0, y - 0)}{\sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{x^3 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 - (1, 0) \cdot (x, y) \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0, \text{ ovvero se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4 - x(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^4 - x^3 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \text{ e quindi se}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^4 - xy^2}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{\varrho^3 (\varrho \sin^4 \vartheta - \cos \vartheta \sin^2 \vartheta)}{\varrho^3} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} (\varrho \sin^4 \vartheta - \cos \vartheta \sin^2 \vartheta) = (-\cos \vartheta \sin^2 \vartheta);$$

il limite risulta uguale a zero solo per particolari valori di ϑ e quindi la funzione non è differenziabile in $(0, 0)$.

I M 3) Data l'equazione $f(x, y) = x \sin y - y \cos x + x - y = 0$, che risulta soddisfatta nel punto $(0, 0)$, si verifichi che sono verificate le ipotesi del Teorema del Dini per definire una funzione implicita $y = y(x)$, determinando poi di questa derivata prima e seconda in $x = 0$.

Dato il gradiente: $\nabla f(x, y) = (\sin y + y \sin x + 1; x \cos y - \cos x - 1)$ da cui:

$\nabla f(0, 0) = (1; -2)$, essendo $f'_y = -2 \neq 0$ si può definire una funzione implicita

$x \rightarrow y(x)$ con derivata prima: $\frac{dy}{dx}(0) = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$.

Sarà poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} y \cos x & \cos y + \sin x \\ \cos y + \sin x & -x \sin y \end{vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ per cui, dal-

la $\frac{d^2y}{dx^2}(0) = -\frac{f''_{xx} + 2f''_{xy}(y') + f''_{yy}(y')^2}{f'_y}$ avremo:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0) = -\frac{0 + 2 \cdot \frac{1}{2} - 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2}{-2} = \frac{1}{2}.$$

I M 4) Data $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$, determinare le direzioni v per le quali $\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = 2$.

La funzione $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$ è ovunque differenziabile due volte, ed avremo quindi:

$\mathcal{D}_v f(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot v = \nabla f(0, 0) \cdot (\cos \alpha, \sin \alpha)$ e pure

$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = v \cdot \mathbb{H}(0, 0) \cdot v^T$.

Essendo:

$\nabla f(x, y) = (2x e^{x^2 - y^2}, -2y e^{x^2 - y^2})$ sarà allora $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

Avremo poi $\mathbb{H}(x, y) = \begin{vmatrix} (2 + 4x^2) e^{x^2 - y^2} & -4xy e^{x^2 - y^2} \\ -4xy e^{x^2 - y^2} & (-2 + 4y^2) e^{x^2 - y^2} \end{vmatrix}$ e quindi:

$\mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ per cui:

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = \|\cos \alpha \quad \sin \alpha\| \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{vmatrix} = \|\cos \alpha \quad \sin \alpha\| \cdot \begin{vmatrix} 2 \cos \alpha \\ -2 \sin \alpha \end{vmatrix} =$$

$$\mathcal{D}_{v,v}^2 f(0, 0) = 2 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha = 2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 2 \cos 2\alpha = 2 \Rightarrow \cos 2\alpha = 1:$$

vera per $2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ oppure per $2\alpha = 2\pi \Rightarrow \alpha = \pi$.

I M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v. : } 2x^2 - 1 \leq y \leq x \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma
$$\begin{cases} \text{Max/min } f(x, y) = x^2 + y^2 \\ \text{s.v.: } \begin{cases} 2x^2 - y - 1 \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases} \end{cases} .$$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile \mathcal{E} che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Formiamo la funzione lagrangiana:

$$\Lambda(x, y, \lambda_1, \lambda_2) = x^2 + y^2 - \lambda_1(2x^2 - y - 1) - \lambda_2(y - x) .$$

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x = 0 \\ \Lambda'_y = 2y = 0 \\ 2x^2 - 1 \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 \leq 0 \\ 0 \leq 0 \end{cases} . \text{ Essendo } \mathbb{H}(x, y) = \mathbb{H}(0, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \text{ da } \begin{cases} |\mathbb{H}_1| > 0 \\ |\mathbb{H}_2| > 0 \end{cases}$$

segue che $(0, 0)$ risulta un punto di minimo, ma nel problema è un punto di frontiera e verrà riesaminato nel seguito.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 4\lambda_1 x = 2x(1 - 2\lambda_1) = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 = 0 \\ y = 2x^2 - 1 \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ \lambda_1 = 2 \\ -1 \leq 0 : \text{vera} \end{cases} \quad \text{oppure}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{4} \\ 2x^2 = \frac{3}{4} \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : \text{vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \\ y = -\frac{1}{4} \\ \lambda_1 = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \leq -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} : \text{falsa} \end{cases} .$$

Il punto $P_1 : (0, -1)$, con $\lambda_1 = 2$ ed il punto $P_2 : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ con $\lambda_1 = \frac{1}{2} > 0$ potrebbero essere punti di massimo, il punto $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ non appartiene alla regione ammissibile.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y - \lambda_2 = 0 \\ y = x \\ 2x^2 - 1 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{\lambda_2}{2} \\ y = \frac{\lambda_2}{2} \\ y = x \\ 2x^2 - 1 \leq y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ -1 \leq 0 : \text{vera} \end{cases} .$$

Il punto $(0, 0)$ rimane un punto da controllare.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 2x - 4\lambda_1 x + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = 2y + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ y = 2x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \quad \text{dato che } \begin{cases} y = 2x^2 - 1 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \cup \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} :$$

$$\begin{cases} -1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{2}{3} > 0 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{3} < 0 \\ x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} . \text{ Il punto } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ non è nulla.}$$

$$\begin{cases} 2 - 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{4}{3} > 0 \\ \lambda_2 = \frac{10}{3} > 0 \\ x = 1 \\ y = 1 \end{cases} .$$

Il punto $P_3 : (1, 1)$ con $\lambda_1 = \frac{4}{3} > 0$ e $\lambda_2 = \frac{10}{3} > 0$ potrebbe essere un punto di Massimo.

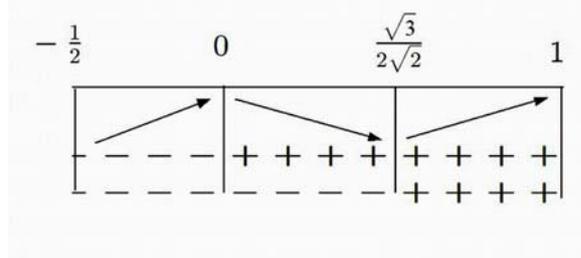
Essendo emerso un solo candidato, il punto $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$ sarà il punto di minimo.

Per concludere, studiamo il comportamento sui punti della frontiera di \mathcal{E} .

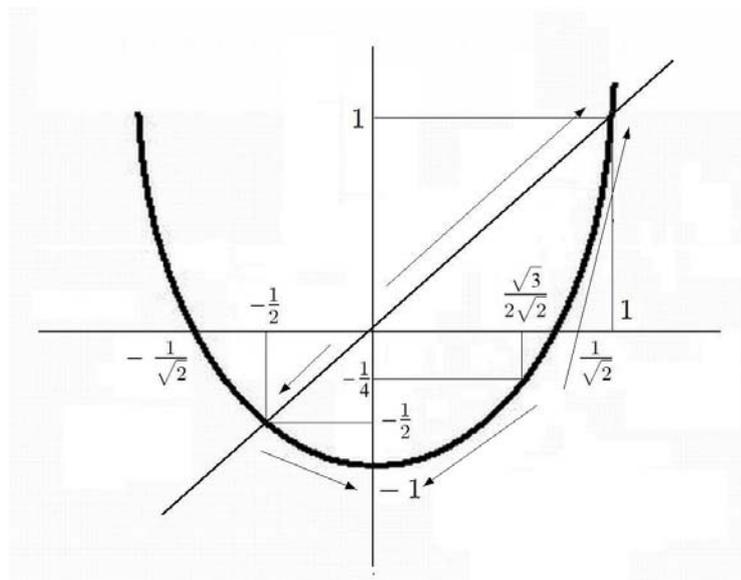
Se $y = x$ risulta $f(x, x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Quindi $f'(x) = 2x \geq 0$ per $x \geq 0$ per cui il punto $(0, 0)$, con $f(0, 0) = 0$, risulta un punto di minimo relativamente ai soli punti della retta $y = x$ ma lo risultava anche per l'analisi globale precedente e quindi è il punto di minimo, oltretutto assoluto in quanto $f(x, y) > 0 \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Se $y = 2x^2 - 1$, avremo:

$$f(x, 2x^2 - 1) = 4x^4 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 16x^3 - 6x = 2x(8x^2 - 3) > 0.$$



Il punto $P_1 : (0, -1)$ con $f(0, -1) = 1$ risulta punto di massimo, mentre invece il punto $P_2 : \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ sulla frontiera risulta punto di minimo, contrariamente a quanto visto nell'indagine globale e quindi non è nulla. Il punto $P_3 : (1, 1)$ con $f(1, 1) = 2$ risulta punto di massimo oltretutto assoluto.



II M 2) Risolvere il sistema omogeneo di equazioni differenziali lineari $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' - x - 2y = 0 \\ x + y' - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} D - 1 & -2 \\ 1 & D - 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{vmatrix} D - 1 & -2 \\ 1 & D - 3 \end{vmatrix} (x) = 0 \Rightarrow (D^2 - 4D + 5)(x) = 0 \Rightarrow x'' - 4x' + 5x = 0.$$

Da $x'' - 4x' + 5x = 0$ otteniamo $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea per $x(t)$ che sarà:

$$x(t) = c_1 e^{2t} \sin t + c_2 e^{2t} \cos t.$$

Dalla $x' = x + 2y$ otteniamo $y(t) = \frac{1}{2}(x' - x)$ e quindi:

$$\text{da } x'(t) = 2c_1 e^{2t} \sin t + c_1 e^{2t} \cos t + 2c_2 e^{2t} \cos t - c_2 e^{2t} \sin t \text{ e}$$

$$x(t) = c_1 e^{2t} \sin t + c_2 e^{2t} \cos t \text{ avremo:}$$

$$y(t) = \frac{1}{2}(x' - x) = \frac{1}{2} e^{2t} (c_1(\sin t + \cos t) + c_2(\cos t - \sin t))$$

e quindi la soluzione generale:

$$\begin{cases} x(t) = e^{2t} (c_1 \sin t + c_2 \cos t) \\ y(t) = \frac{1}{2} e^{2t} (c_1(\sin t + \cos t) + c_2(\cos t - \sin t)) \end{cases}$$

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} x y' = (y - 1) \log x \\ y(1) = 3 \end{cases}$.

L'equazione data è una equazione a variabili separabili che portiamo nella forma:

$$\frac{1}{y-1} y' = \frac{\log x}{x} \text{ avendo posto } y \neq 1 \text{ e } x > 0. \text{ Osserviamo che la } y = 1 \text{ è soluzione dell'equazione differenziale. Passando ad integrare avremo:}$$

$$\int \frac{1}{y-1} y' dx = \int \frac{1}{y-1} dy = \int \frac{\log x}{x} dx + k \text{ da cui:}$$

$$\log(y-1) = \frac{1}{2} \log^2 x + k \Rightarrow y-1 = e^{\frac{1}{2} \log^2 x + k} = m e^{\frac{1}{2} \log^2 x} = m \left((e^{\log x})^{\log x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

avendo posto $e^k = m$ e quindi $y = m \sqrt{x^{\log x}} + 1$.

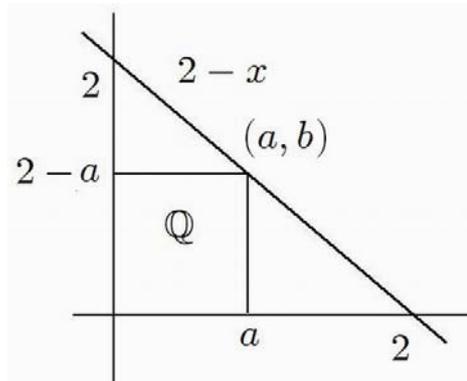
Dalla $y(1) = 3$ otteniamo $3 = m \sqrt{1^{\log 1}} + 1 = m + 1 \Rightarrow m = 2$.

Quindi la soluzione particolare del problema: $y = 2 \sqrt{x^{\log x}} + 1$.

La soluzione $y = 1$ si ottiene per $m = 0$ ma $e^k = m$ e quindi per $k \rightarrow -\infty$.

Il M 4) Data $f(x, y) = 2x - 2y$, si determini, per $x > 0, y > 0$, un punto (a, b) , appartenente alla retta di equazione $y = 2 - x$, tale che, detto \mathbb{Q} il rettangolo avente due lati sugli assi e per vertici opposti $(0, 0)$ e (a, b) , risulti $\int\int_{\mathbb{Q}} f(x, y) dx dy = 0$.

Per il punto (a, b) , dato che appartiene alla retta di equazione $y = 2 - x$, sarà $b = 2 - a$.
Vista la regione di integrazione:



$\mathbb{Q} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq 2 - a\}$ avremo:

$$\int\int_{\mathbb{Q}} 2x - 2y dx dy = \int_0^a \int_0^{2-a} 2x - 2y dy dx = \int_0^a (2xy - y^2 \Big|_0^{2-a}) dx =$$

$$= \int_0^a 2x(2-a) - (2-a)^2 dx = ((2-a)x^2 - (2-a)^2 x \Big|_0^a =$$

$$= (2-a)a^2 - (2-a)^2 a = a(2-a)(a - (2-a)) = a(2-a)(2a-2) = 0.$$

Viste le limitazioni imposte $x > 0, y > 0$, le soluzioni $a = 0$ e $a = 2$ non sono accettabili e quindi rimane solo la soluzione $a = 1$, ovvero \mathbb{Q} è un quadrato.