# COMPITO di ANALISI MATEMATICA 3/06/2024

I M 1) Usando la forma trigonometrica dei numeri complessi, calcolare $\dfrac{i^6}{(1+i)^4} \cdot (1-i)^8$.

Da $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$ segue $i^6 = \cos\left(6\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(6\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos 3\pi + i\,\mathrm{sen}\,3\pi$ e quindi: $i^6 = \cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi$;

da $(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ segue $(1+i)^4 = 4\left(\cos\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(4\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$ e quindi: $(1+i)^4 = 4\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right)$;

da $(1-i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$ segue :

$(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\right)^8\left(\cos\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(8\cdot\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ e quindi:

$(1-i)^8 = 16\left(\cos 14\pi + i\,\mathrm{sen}\,14\pi\right) = 16\left(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0\right)$.

Sarà allora: $\dfrac{i^6}{(1+i)^4}\cdot(1-i)^8 = \dfrac{\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi}{4\left(\cos\pi + i\,\mathrm{sen}\,\pi\right)}\cdot 16\left(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0\right)$ ovvero:

$\dfrac{i^6}{(1+i)^4}\cdot(1-i)^8 = 4$ .

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato che la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

Calcoliamo $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^3\left(\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right)}{\varrho^2} = \lim\limits_{\varrho\to 0} \varrho\left(\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right) = 0$; la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\left(\cos^3\vartheta + \mathrm{sen}^3\,\vartheta\right)\right| \leq 2\varrho < \varepsilon$, soddisfatta per $0 < \varrho < \dfrac{\varepsilon}{2}$. La funzione è quindi continua in $(0,0)$.

Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3+0}{h^2}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3}{h^3} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0+h^3}{h^2}\cdot\dfrac{1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^3}{h^3} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$.

Quindi $\nabla f(0,0) = (1,1)$.

Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0,y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0$ ovvero se:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0 - (1,1)\cdot(x,y)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, ovvero se

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - (x+y)\right)\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ da cui

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3-(x+y)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ e quindi:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3-x^3-y^3-x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$ ed infine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$

Passando a coordinate polari otteniamo:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-x^2y-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0} \frac{-\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta(\cos\vartheta-\mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^3}$$

Ma $\lim_{\varrho\to 0} \frac{-\varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta(\cos\vartheta-\mathrm{sen}\,\vartheta)}{\varrho^3} = -\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta(\cos\vartheta-\mathrm{sen}\,\vartheta) = 0$ solo per particolari valori di $\vartheta$. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) Sapendo che il sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = z+y = 0 \\ g(x,y,z) = x^2+y^2-xy+z = 0 \end{cases}$ è soddisfatto in un unico punto $\mathrm{P} = (1,y,z)$, determinare tale punto e stabilire una funzione implicita che possa essere con esso definita; di questa calcolare poi le derivate prime.

Sostituendo avremo $\begin{cases} f(1,y,z) = z+y = 0 \\ g(1,y,z) = 1+y^2-y+z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ y^2-2y+1 = 0 \end{cases}$ da cui:

$\Rightarrow \begin{cases} z = -y \\ (y-1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$. Quindi avremo il punto $\mathrm{P} = (1,1,-1)$.

Sarà poi $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 2x-y & 2y-x & 1 \end{matrix} \right\|$ da cui $\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y,z)}(1,1,-1) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$.

Dato che $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 \neq 0$ si può definire una funzione $z \to (x,y)$ e si può definire una funzione $y \to (x,z)$;

dato che $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-1 = 0$ non si può definire una funzione $x \to (y,z)$.

Se scegliamo di definire una funzione $z \to (x,y)$ avremo le derivate:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{-1} = 0\,;\quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-1}{-1} = -1\,.$$

Se scegliamo di definire una funzione $y \to (x,z)$ avremo le derivate:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{0}{-1} = 0\,;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{-1}{-1} = -1\,.$$

I M 4) Data $f(x,y) = x^2-xy+y$, determinare il punto $P_0$ nel quale $\mathcal{D}_u f(P_0) = 0$ e $\mathcal{D}_v f(P_0) = \sqrt{2}$, dove $u$ è il versore $(1,0)$ e $v$ il versore di $(1,1)$.

La funzione è palesemente differenziabile in tutto $\mathbb{R}$ e quindi avremo:

$\mathcal{D}_u f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot u$ e $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot v$.

Essendo $\nabla f(x,y)=(2x-y;1-x)$ e risultando poi $u=(1,0)$ e $v=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_u f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot u=(2x_0-y_0;1-x_0)\cdot(1,0)=0 \\ \mathcal{D}_v f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot v=(2x_0-y_0;1-x_0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_0-y_0=0 \\ 2x_0-y_0+1-x_0=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0=2x_0 \\ x_0-2x_0+1=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=-2 \end{cases}.$$

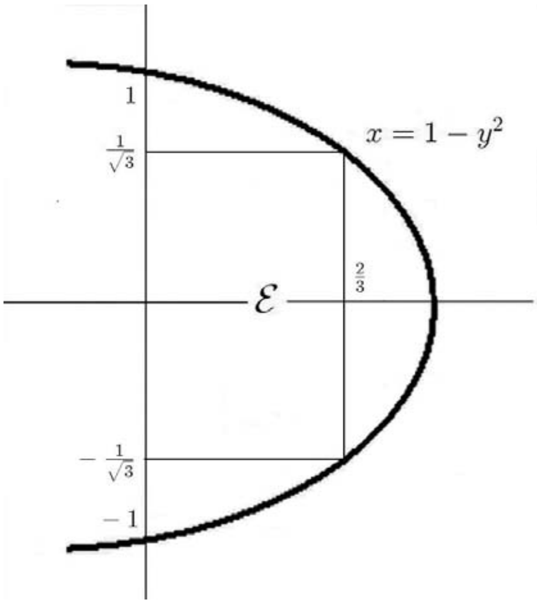
Il punto $P_0$ nel quale $\mathcal{D}_u f(P_0)=0$ e $\mathcal{D}_v f(P_0)=\sqrt{2}$ è il punto $P_0=(-1;-2)$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=xy \\ \text{s.v.: } 0\le x\le 1-y^2 \end{cases}$.

Scriviamo il problema nella forma $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y)=xy \\ \text{s.v.: } \begin{cases} x+y^2-1\le 0 \\ -x\le 0 \end{cases} \end{cases}$.

$$\begin{cases} x=0 \\ x=1-y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \cup \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}.$$

La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, i vincoli definiscono una regione ammissibile $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto, i vincoli sono qualificati, e quindi possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e le condizioni di Kuhn-Tucker. Sicuramente la funzione ammette valore massimo e valore minimo.




Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda_1,\lambda_2)=xy-\lambda_1\left(x+y^2-1\right)-\lambda_2(-x)$.

Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

1) caso $\lambda_1=0,\lambda_2=0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x=y=0 \\ \Lambda'_y=x=0 \\ x+y^2\le 1 \\ -x\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0+0\le 1 \\ 0\le 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbb{H}(x,y)=\mathbb{H}(0,0)=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Se $(0,0)$ fosse un punto interno al dominio essendo $|\mathbb{H}_2| = -1 < 0$ il punto sarebbe di sella, ma trattandosi di un punto sulla frontiera di $\mathcal{E}$ dobbiamo fare ulteriori valutazioni.

2) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - \lambda_1 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x + y^2 = 1 \\ -x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 \\ x = 2\lambda_1^2 \\ 2\lambda_1^2 + \lambda_1^2 = 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 \\ x = 2\lambda_1^2 \\ \lambda_1^2 = \frac{1}{3} \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \lambda_1 \\ x = 2\lambda_1^2 \\ \lambda_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \geq 0 \end{cases};$$

abbiamo quindi due soluzioni:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} \geq 0 \text{ vera} \end{cases} \cup \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} \geq 0 \text{ vera} \end{cases}.$$

Il punto $P_1 : \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, con $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$ potrebbe essere punto di massimo, il punto $P_2 : \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, con $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$ potrebbe essere punto di minimo.

3) caso $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x = 0 \\ x = 0 \\ x + y^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

. Nei punti dell'asse $y$ ( $x = 0$ ) la funzione obiettivo $f(x,y) = xy$ risulta sempre uguale a zero. Nel primo quadrante, essendo $f(x,y) = xy > 0$ i punti $(0,y)$ sono punti di minimo, mentre nel quarto quadrante, essendo $f(x,y) = xy < 0$ i punti $(0,y)$ sono punti di massimo. Il punto $(0,0)$ è quindi un punto di sella.

4) caso $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ :

$$\begin{cases} \Lambda'_x = y - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \Lambda'_y = x - 2\lambda_1 y = 0 \\ x + y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{dato che} \begin{cases} x = 1 - y^2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}, \text{ avremo:}$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

. Il punto $(0,1)$ potrebbe essere punto di minimo.

$$\begin{cases} -1 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 = 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 1 > 0 \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

. Il punto $(0,-1)$ potrebbe essere punto di massimo. I due risultati sono coerenti con quanto detto al punto 3).

Passando a studiare la funzione sulla frontiera di $\mathcal{E}$, il caso dei punti $(0,y)$ è stato già studiato. Esaminiamo i punti del vincolo $x + y^2 = 1$ da cui $x = 1 - y^2$ per cui sostituendo avremo:

$f\left(1-y^2, y\right)=y-y^3=f(y) \Rightarrow f'(y)=1-3y^2>0$ per $y^2<\frac{1}{3}$ ovvero per: $-\frac{1}{\sqrt{3}}<y<\frac{1}{\sqrt{3}}$ la funzione è crescente, per $-1<y<-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e per $\frac{1}{\sqrt{3}}<y<1$ sarà decrescente.

Il punto $P_1:\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ con $f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ sarà punto di massimo assoluto, il punto $P_2:\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ con $f\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$, sarà punto di minimo assoluto.

In $(0,1)$ e $(0,-1)$ avremo rispettivamente un punto di minimo ed uno di massimo relativi.

II M 2) Data la funzione $f(x, y)=x^2+y^3+2xy-y$ se ne determinino gli eventuali punti di massimo o minimo relativo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:

$\nabla f(x, y)=\left(f_x', f_y'\right)=\left(2x+2y ; 3y^2+2x-1\right)$ per cui:

$$\begin{cases}2x+2y=0 \\ 3y^2+2x-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x^2+2x-1=0 \\ y=-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \\ y=-x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\frac{-1 \pm 2}{3} \\ y=-x\end{cases}$$

da cui: $\begin{cases}x=\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{3}\end{cases} \cup \begin{cases}x=-1 \\ y=1\end{cases}$.

Abbiamo due punti stazionari: $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ e $(-1,1)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x, y)=\left\|\begin{matrix}2 & 2 \\ 2 & 6y\end{matrix}\right\|$, avremo:

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left\|\begin{matrix}2 & 2 \\ 2 & -2\end{matrix}\right\|$ per cui, essendo :

$\left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right|=-8<0$ , il punto $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$ è un punto di sella.

A tale conclusione si può arrivare anche semplicemente notando che le due derivate pure hanno segno diverso.

Sarà poi $\mathbb{H}(-1,1)=\left\|\begin{matrix}2 & 2 \\ 2 & 6\end{matrix}\right\|$ per cui, essendo :

$\begin{cases}\left|\mathbb{H}_1(-1,1)\right|=2>0 \\ \left|\mathbb{H}_2(-1,1)\right|=12-4=8>0\end{cases}$, il punto $(-1,1)$ è un punto di minimo.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases}y''+y=\cos 2x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0\end{cases}$.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea. Da $y''+y=0$ otteniamo:

$\left(D^2+1\right)(y)=0$ ovvero $\lambda_1=\lambda_2=i$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà: $y(x)=c_1 \operatorname{sen} x+c_2 \cos x$.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $y_0(x)=a \operatorname{sen} 2x+b \cos 2x$ per cui avremo:

$y_0'=2a \cos 2x-2b \operatorname{sen} 2x$ e $y_0''=-4a \operatorname{sen} 2x-4b \cos 2x$,

da cui sostituendo nella $y''+y=\cos 2x$ otteniamo:

$-4a \operatorname{sen} 2x-4b \cos 2x+a \operatorname{sen} 2x+b \cos 2x=\cos 2x$ ovvero :

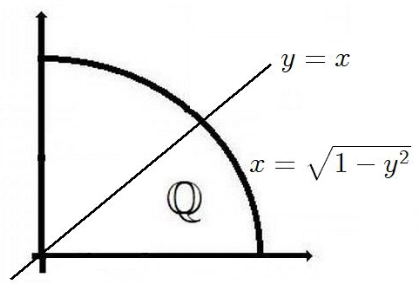
$\begin{cases} -3a\,\mathrm{sen}\,2x = 0 \\ -3b\cos 2x = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$ e quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $y(x) = c_1\,\mathrm{sen}\,x + c_2\cos x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

Sarà poi, da $\begin{cases} y = c_1\,\mathrm{sen}\,x + c_2\cos x - \frac{1}{3}\cos 2x \\ y' = c_1\cos x - c_2\,\mathrm{sen}\,x + \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,2x \end{cases}$, imponendo le condizioni:

$\begin{cases} y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 + \frac{1}{3} = 1 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2}{3} \\ c_2 = 0 \end{cases}$ e quindi la soluzione particolare del problema di Cauchy sarà $y(x) = \dfrac{2}{3}\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$.

II M 4) Calcolare $\displaystyle\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, dove $\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$.

Vista la regione di integrazione:




$\mathbb{Q} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le x \le \sqrt{1-y^2}\right\}$ avremo, passando a coordinate polari:

$$\iint_{\mathbb{Q}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \varrho^2\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cdot\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^1 \varrho^3\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\left(\frac{\varrho^4}{4}\right|_0^1 \mathrm{d}\vartheta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\vartheta\,\mathrm{sen}\,\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \Rightarrow \frac{1}{4}\int \mathrm{sen}\,\vartheta\;\mathrm{d}(\mathrm{sen}\,\vartheta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\,\vartheta\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2} - 0\right] = \frac{1}{16}.$$