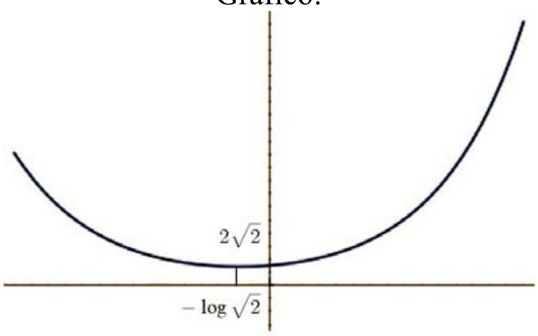
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 3/06/2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 2e^x + e^{-x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} 2e^x + e^{-x} = 2e^{\to(-\infty)} + e^{\to(+\infty)} = +\infty$;
$\lim_{x\to+\infty} 2e^x + e^{-x} = 2e^{\to(+\infty)} + e^{\to(-\infty)} = +\infty$.
Non ci sono asintoti di alcun tipo.
$f(x) = 2e^x + e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}; f(0) = 3$.
$f'(x) = 2e^x - e^{-x} = 2e^x - \frac{1}{e^x} = \frac{2e^{2x}-1}{e^x} > 0 \Rightarrow 2e^{2x} > 1 \Rightarrow e^{2x} > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x > \log\frac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x > \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = \log\frac{1}{\sqrt{2}} = -\log\sqrt{2}$;
quindi la funzione è decrescente per $x < -\log\sqrt{2}$, crescente per $x > -\log\sqrt{2}$.
Quindi in $x = -\log\sqrt{2}$, con $f\left(-\log\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$ abbiamo un punto di minimo assoluto.
Da $f'(x) = 2e^x - e^{-x}$ avremo poi $f''(x) = 2e^x + e^{-x} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ per cui la funzione $f(x)$ è convessa $\forall x \in \mathbb{R}$. Non ci sono punti di flesso.

Grafico:



2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x}$; $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{1-2x}\right)^{3x}$.

a) $\lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{1-\cos 2x} = \lim_{x\to0} \frac{1-\cos 3x}{9x^2} \cdot \frac{9x^2}{4x^2} \cdot \frac{4x^2}{1-\cos 2x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{4} \cdot 2 = \frac{9}{4}$.

b) $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{1-2x}\right)^{3x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{1-2x}\right)^{1-2x}\right]^{\frac{3x}{1-2x}} = \left(\to e^2\right)^{\left(\to-\frac{3}{2}\right)} = e^{-3}$, in quanto $\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{1-2x}\right)^{1-2x} = \lim_{t\to-\infty} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t = e^2$ mentre $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{1-2x} = -\frac{3}{2}$.

3) Determinare il valore del parametro k per il quale $\lim_{x\to0} \frac{1-e^{kx}}{1-e^x} = 4$.

Risulta $\lim_{x\to0} \frac{1-e^{kx}}{1-e^x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{kx}-1}{kx} \cdot \frac{kx}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1} = 1 \cdot k \cdot 1 = k = 4 \Rightarrow k = 4$.

4) Data la funzione $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+1}$, sapendo che $f(g(x)) = x - 1$, determinare l'espressione della funzione $g(x)$ e determinare poi l'espressione della funzione $g(x-1)$.

Da $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2x+1}$ avremo anche $f(x) = \dfrac{2x+1-1}{2x+1} = \dfrac{2x}{2x+1}$ da cui:

$$f(g(x)) = \frac{2g(x)}{2g(x)+1} = x - 1 \Rightarrow 2g(x) = (2g(x)+1)(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2g(x)(1-(x-1)) = x - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x-1}{2(2-x)} \text{ e quindi:}$$

$$g(x-1) = \frac{(x-1)-1}{2(2-(x-1))} = \frac{x-2}{2(3-x)}\,.$$

5) Calcolare $\displaystyle\int_1^e 3x - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva ($k=0$), e avremo:

$$\int 3x - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \int 3x\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log x \text{ e quindi:}$$

$$\int_1^e 3x - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log x\right|_1^e = \left[\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}\log e\right] - \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\log 1\right] = \frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$$

e quindi $\displaystyle\int_1^e 3x - \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}e^2 - 2$.

6) Trovare il punto x_0 in cui la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^2 - 4x - 1$ risulta perpendicolare alla retta di equazione $y = 3x - 1$.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Per avere una retta perpendicolare alla retta di equazione $y = 3x - 1$ dobbiamo avere una retta il cui coefficiente angolare m sia uguale a $-\dfrac{1}{3}$ e quindi dovrà risultare:

$$f'(x_0) = 2x - 4 = -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \text{ e quindi } x_0 = \frac{11}{6}\,.$$

7) Determinare il gradiente della funzione $f(x,y) = e^{x^3-y} + 2\log\left(x + 4y^2\right) - y$ nel punto $(1,1)$.

Avremo quindi:

$$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = \left(3x^2\,e^{x^3-y} + 2\,\frac{1}{x+4y^2};\, -e^{x^3-y} + 2\,\frac{8y}{x+4y^2} - 1\right) \text{ per cui:}$$

$$\nabla f(1,1) = \left(3\,e^{1-1} + 2\,\frac{1}{1+4};\, -e^{1-1} + 2\,\frac{8}{1+4} - 1\right) = \left(3 + \frac{2}{5};\, -1 + \frac{16}{5} - 1\right)$$

e quindi $\nabla f(1,1) = \left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{6}{5}\right)$.

8) Data la matrice $\mathbb{A} = \begin{Vmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix}$, ed i vettori $\mathbb{X} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{Y} = \begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{Vmatrix}$, determinare il valore dei parametri m e k per i quali risulta $\mathbb{A} \cdot \mathbb{X} = \mathbb{Y}$.

Sarà $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} k & 1 & -1 \\ 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & k \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} k-1-2 \\ 3-m+2 \\ 1-1+2k \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} k-3 \\ 5-m \\ 2k \end{Vmatrix}$ e quindi, affinchè risulti $\mathbb{A}\cdot\mathbb{X}=\mathbb{Y}$ dovrà essere $\begin{Vmatrix} k-3 \\ 5-m \\ 2k \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{Vmatrix}$, vera per $k=2$ e $m=1$.

9) Date tre proposizioni $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$, costruire la tavola di verità della proposizione composta $(\mathbb{A}\Rightarrow non\,\mathbb{C})\Leftrightarrow(non\,\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C})$ sotto l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano vere.

Poniamo per brevità $P_1:(\mathbb{A}\Rightarrow non\,\mathbb{C})$ e $P_2:(non\,\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C})$.
Data l'ipotesi che almeno due fra le tre proposizioni siano vere, la tavola di verità si riduce a:

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{C}$	$non\mathbb{C}$	P_1:$\mathbb{A}\Rightarrow non\mathbb{C}$	$non\mathbb{B}$	$P_2:non\mathbb{B}\Rightarrow\mathbb{C}$	$P_1\Leftrightarrow P_2$
1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	1

10) Determinare l'espressione del polinomio di Taylor di secondo grado nel punto $x=1$ per la funzione $f(x)=x^2\log x$.

La funzione è continua e derivabile in tutto il suo campo di esistenza, ovvero per $x>0$.
Vista l'espressione del Polinomio di Taylor di secondo grado nel punto x_0 :
$P_2(x,x_0)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}\,f''(x_0)(x-x_0)^2$ da
$f(1)=1^2\log 1=0$;
$f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}=\;2x\log x+x$ da cui $f'(1)=2\log 1+1=1$;
$f''(x)=2\log x+2x\cdot\frac{1}{x}+1=\;2\log x+3$ da cui $f''(1)=2\log 1+3=3$ avremo:
$P_2(x,1)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}\,f''(1)(x-1)^2$ e quindi:
$P_2(x,1)=0+(x-1)+\frac{3}{2}\,(x-1)^2$.