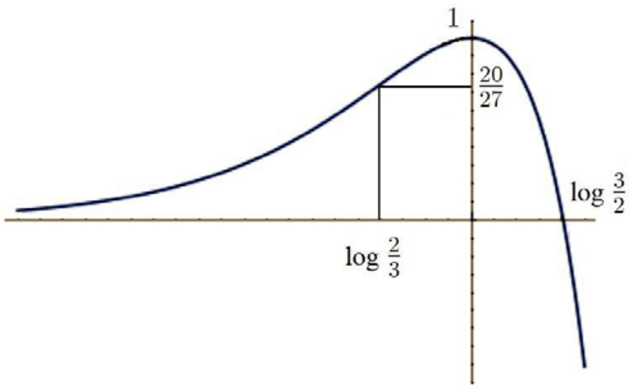
COMPITO di MATEMATICA GENERALE 24/06/2024

1) Determinare l'andamento del grafico della funzione $f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x}$.

C.E.: $\mathbb{R}$. La funzione è continua in tutto $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} 3e^{2x} - 2e^{3x} = 3e^{\to(-\infty)} - 2^{\to(-\infty)} = 0^+$;
$\lim_{x\to+\infty} 3e^{2x} - 2e^{3x} = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}(3-2e^x) = e^{\to(+\infty)}\left(3 - 2e^{\to(+\infty)}\right) = +\infty(-\infty) = -\infty.$
C'è un asintoto orizzontale sulla sinistra.
$f(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x} = e^{2x}(3-2e^x) > 0 \Rightarrow e^x < \frac{3}{2} \Rightarrow x < \log\frac{3}{2}$; $f(0) = 1$.
$f'(x) = 3\cdot 2\,e^{2x} - 2\cdot 3\,e^{3x} = 6e^{2x}(1-e^x) > 0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow x < 0$;
quindi la funzione è crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$.
Quindi in $x = 0$, con $f(0) = 1$ abbiamo un punto di massimo assoluto.
Da $f'(x) = 6\,e^{2x} - 6\,e^{3x}$ segue $f''(x) = 6\cdot 2\,e^{2x} - 6\cdot 3\,e^{3x} = 6e^{2x}(2-3e^x) > 0$ per cui $f''(x) > 0$ per $3e^x < 2 \Rightarrow e^x < \frac{2}{3} \Rightarrow x < \log\frac{2}{3}$.
La funzione $f(x)$ è convessa per $x < \log\frac{2}{3}$, concava per $x > \log\frac{2}{3}$. In $x = \log\frac{2}{3}$ abbiamo un punto di flesso con $f\left(\log\frac{2}{3}\right) = 3\left(e^{\log\frac{2}{3}}\right)^2 - 2\left(e^{\log\frac{2}{3}}\right)^3 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{3} - \frac{16}{27}$ e quindi $f\left(\log\frac{2}{3}\right) = \frac{20}{27}$.

Grafico:

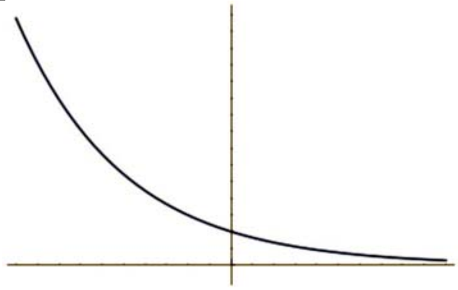


2) Determinare il valore dei seguenti limiti:
$\lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{\operatorname{sen} 2x}$; $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x+x^2}{1+2x^2}\right)^{1-3x}$.

a) $\lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to0} \frac{e^{3x}-1}{3x}\cdot\frac{3x}{2x}\cdot\frac{2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1\cdot\frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$.
b) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+x+x^2}{1+2x^2}\right)^{1-3x} = \left(\to\frac{1}{2}\right)^{(\to-\infty)} = +\infty$.

3) Disegnare un possibile grafico per un funzione che soddisfi entrambe le seguenti definizioni di limite:
a) $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$;
b) $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$.

Da $\forall\,\varepsilon\;\exists\,\delta(\varepsilon) : x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow f(x) > \varepsilon$ segue $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;
da $\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta(\varepsilon) : x > \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ segue $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
e quindi un possibile grafico può essere:



4) Date le funzioni $f(x) = 2x+1$, $g(x) = e^{2x} - 1$ e $h(x)$, sapendo che $f(g(h(x))) = x$, determinare l'espressione della funzione $h(x)$.

Da $f(x) = 2x+1$ e $g(x) = e^{2x} - 1$ avremo $f(g(x)) = 2\left(e^{2x} - 1\right) + 1 = 2e^{2x} - 1$ da cui $f(g(h(x))) = 2e^{2\,h(x)} - 1 = x \Rightarrow 2e^{2\,h(x)} = x + 1 \Rightarrow e^{2\,h(x)} = \dfrac{x+1}{2} \Rightarrow 2\,h(x) = \log\dfrac{x+1}{2}$
e quindi $h(x) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{2} = \log\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}$.

5) Calcolare $\displaystyle\int_0^1 e^{3x} - x^{3e}\,\mathrm{d}x$.

Determiniamo una primitiva ($k = 0$), e avremo:
$\displaystyle\int e^{3x} - x^{3e}\,\mathrm{d}x = \int e^{3x}\,\mathrm{d}x - \int x^{3e}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,e^{3x} - \frac{1}{3e+1}\,x^{3e+1}$ e quindi:
$\displaystyle\int_0^1 e^{3x} - x^{3e}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{3}\,e^{3x} - \frac{1}{3e+1}\,x^{3e+1}\right|_0^1 = \left[\frac{1}{3}\,e^{3} - \frac{1}{3e+1}\right] - \left[\frac{1}{3} - 0\right] =$
$\displaystyle= \frac{1}{3}\,e^3 - \frac{1}{3e+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\,e^3 - \frac{3e+4}{3(3e+1)}$ e quindi $\displaystyle\int_0^1 e^{3x} - x^{3e}\,\mathrm{d}x = \frac{3e^4 + e^3 - 3e - 4}{3(3e+1)}$.

6) Date le funzioni $f(x) = e^{2x} + 1$ e $g(x) = x^2 - kx + 1$, determinare il valore del parametro k in modo che le due funzioni abbiano, nel punto $x = 1$, rette tangenti al loro grafico tra loro parallele.

L'equazione della retta tangente nel punto x_0 è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.
Per avere rette parallele occorre che le due rette abbiano lo stesso coefficiente angolare.
Dato che il coefficiente angolare è dato dalla derivata calcolata nel punto, dovrà risultare $f'(x_0) = g'(x_0)$ ovvero $f'(1) = g'(1)$ e quindi, essendo $f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(1) = 2e^2$ mentre $g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$, dovrà essere $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2e^2 = 2 - k$ per avere infine $k = 2 - 2e^2$.

7) Data la funzione $f(x,y) = 3x - 2e^y - 3x^2 + 2y$, determinarne gli eventuali punti di massimo e/o minimo.

Per le condizioni del I ordine si deve annullare il gradiente. Avremo quindi:
$\nabla f(x,y) = \left(f'_x, f'_y\right) = (3 - 6x; 2 - 2e^y)$ per cui:

$\begin{cases} 3-6x=0 \\ 2-2e^y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ e^y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ da cui: $\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$.

Abbiamo un solo punto stazionario: $\left(\frac{1}{2},0\right)$.

Essendo poi $\mathbb{H}(x,y)=\begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2e^y \end{Vmatrix}$, avremo:

$\mathbb{H}\left(\frac{1}{2},0\right)=\begin{Vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{Vmatrix}$ per cui, essendo :

$\begin{cases} \left|\mathbb{H}_1\left(\frac{1}{2},0\right)\right| = -6<0 \\ \left|\mathbb{H}_2\left(\frac{1}{2},0\right)\right| = 12>0 \end{cases}$, il punto $\left(\frac{1}{2},0\right)$ è un punto di massimo.

8) Date le matrici $\mathbb{A}=\begin{Vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \\ k & 1 \end{Vmatrix}$ e $\mathbb{B}=\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}$, ed il vettore $\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}$, determinare i valori del parametro k per i quali il modulo del vettore $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}$ risulta pari a 2.

Sarà $\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \\ k & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \\ k & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 1+1 \\ -1-1 \end{Vmatrix}=$

$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}=\begin{Vmatrix} 2 & k \\ 1 & 1 \\ k & 1 \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 2 \\ -2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 4-2k \\ 2-2 \\ 2k-2 \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 4-2k \\ 0 \\ 2k-2 \end{Vmatrix}$. Per cui avremo:

$\|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}\|=\sqrt{(4-2k)^2+0^2+(2k-2)^2}=\sqrt{16+4k^2-16k+0+4k^2+4-8k}$

e quindi $\|\mathbb{A}\cdot\mathbb{B}\cdot\mathbb{X}\|=2$ se $\sqrt{8k^2-24k+20}=2$ ovvero $8k^2-24k+20=4$ da cui $8k^2-24k+16=0 \Rightarrow 8\left(k^2-3k+2\right)=8(k-1)(k-2)=0$ e quindi avremo le due soluzioni $k=1$ e $k=2$.

9) Si verifichi se la proposizione $[non\,(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})]\Leftrightarrow(non\,\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})$, dove $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ sono due generiche proposizioni, risulti o meno una tautologia.

$\mathbb{A}$	$\mathbb{B}$	$\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_1: non\,(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})$	$non\,\mathbb{A}$	$P_2: non\,\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B}$	$P_1\Leftrightarrow P_2$
1	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0	1

La proposizione $[non\,(\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})]\Leftrightarrow(non\,\mathbb{A}\Rightarrow\mathbb{B})$, come si vede dall'ultima colonna, in prima e terza riga, non è una tautologia.

10) Data la funzione $f(x)=x^3-3x^2+1$, determinare per quale valore del parametro k la funzione data soddisfa alle ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[0,k]$, determinando poi il conseguente punto stazionario e la sua natura.

La funzione è un polinomio, quindi è continua e derivabile in tutto il suo campo di esistenza.
Per applicare il Teorema di Rolle nell'intervallo $[0,k]$ occorre che risulti $f(0)=f(k)$ e quindi: $f(0)=0-0+1=f(k)=k^3-3k^2+1\Rightarrow k^3-3k^2=k^2(k-3)=0$.
Essendo ovviamente da scartare la soluzione $k=0$ rimane la sola soluzione $k=3$.

Applicando il Teorema di Rolle alla funzione $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ nell'intervallo $[0, 3]$, ne segue che esiste in $[0, 3]$ almeno un punto x_0 in cui $f'(x_0) = 0$ cioè $f'(x) = 3x^2 - 6x = 0$. Ma $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x\,(x - 2) = 0$ per cui risulta $x_0 = 2$.