COMPITO di ANALISI MATEMATICA 24/06/2024

I M 1) Usando la forma trigonometrica dei numeri complessi, se $z = \dfrac{i^7}{(1+i)^6}$ calcolare $\sqrt[3]{z}$.

Da $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}$ segue $i^7 = \cos\left(7\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(7\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{7\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{2} =$
$i^7 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2} = -i\,;$
ed anche $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -1\,;$
da $(1+i) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$ segue $(1+i)^6 = 8\left(\cos\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(6\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right) =$
$(1+i)^6 = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2}\right) = -8i\,.$
Quindi $z = \dfrac{-i}{-8i} = \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0)\,.$
Quindi $\sqrt[3]{z} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8}}\left(\cos\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{0}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right); 0 \le k \le 2\,.$
Per $k = 0\,:\ \frac{1}{2}(\cos 0 + i\,\mathrm{sen}\,0) = \frac{1}{2}\,;$
per $k = 1\,:\ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} + i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,;$
per $k = 2\,:\ \frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{4} - i\,\frac{\sqrt{3}}{4}\,.$

I M 2) Data la funzione $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|x^3y^3|}}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$, dopo aver verificato che la funzione risulta continua in $(0,0)$, si verifichi se sia anche differenziabile.

Calcoliamo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^3y^3|}}{x^2+y^2}$ passando a coordinate polari:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^3y^3|}}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{\varrho\to 0} \frac{\varrho^3\sqrt{|\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}^3\,\vartheta|}}{\varrho^2} = \lim_{\varrho\to 0} \varrho\sqrt{|\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}^3\,\vartheta|} = 0\,;$$
la convergenza è uniforme dato che $\left|\varrho\sqrt{|\cos^3\vartheta\,\mathrm{sen}^3\,\vartheta|}\right| \le \varrho < \varepsilon$. La funzione è quindi continua in $(0,0)$.
Passando al calcolo del gradiente, avremo poi:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|h^3\cdot 0|}}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0\,;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot h^3|}}{h^2}\cdot\frac{1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h^3} = 0\,.$$
Quindi $\nabla f(0,0) = (0,0)\,.$
Per la differenziabilità in $(0,0)$ dobbiamo infine verificare se:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x-0, y-0)}{\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}} = 0 \text{ ovvero se:}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^3y^3|} - 0 - 0}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0\,.$$
Passando a coordinate polari otteniamo:

$\lim\limits_{\varrho\to 0} \dfrac{\varrho^3 \sqrt{|\cos^3\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta|}}{\varrho^3} = \sqrt{|\cos^3\vartheta \operatorname{sen}^3\vartheta|} = 0$ solo per particolari valori di ϑ. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$.

I M 3) L'equazione $f(x,y) = x^3 + y^3 - xy - x = 0$ definisce in un intorno del punto $(1,0)$ una funzione implicita $y = y(x)$. Calcolare $y'(1)$ e $y''(1)$.

Essendo $\nabla f(x,y) = \left(3x^2 - y - 1; 3y^2 - x\right)$ da cui $\nabla f(1,0) = (2;\,-1)$.
Essendo $f'_y = -1 \neq 0$, esiste una funzione implicita $y = y(x)$ in un intorno di $x = 1$.
Per essa avremo $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{f'_x}{f'_y} = -\dfrac{2}{-1} = 2$.
Sarà poi $\mathbb{H}(x,y) = \begin{Vmatrix} 6x & -1 \\ -1 & 6y \end{Vmatrix}$ da cui $\mathbb{H}(1,0) = \begin{Vmatrix} 6 & -1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$.
Dalla $y'' = -\dfrac{f''_{xx} + 2f''_{xy}\,y' + f''_{yy}\,(y')^2}{f'_y}$ si ha $y''(1) = -\dfrac{6 + 2\cdot(-1)\cdot 2 + 0\cdot(2)^2}{-1} = 2$.

I M 4) Data la funzione $f(x,y) = e^{\alpha x - y}$, determinare il valore del parametro α sapendo che $D_v f(0,0) = \sqrt{2}$, dove v è il versore di $(1,1)$.

La funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$ e quindi avremo: $\mathcal{D}_v f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot v$.
Essendo $\nabla f(x,y) = (\alpha\, e^{\alpha x - y};\, -e^{\alpha x - y}) \Rightarrow \nabla f(0,0) = (\alpha;\,-1)$ e $v = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ si ha:

$\mathcal{D}_v f(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v = (\alpha;\,-1)\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - 1) = \sqrt{2} \Rightarrow \alpha - 1 = 2$ e quindi infine $\alpha = 3$.

II M 1) Risolvere il problema $\begin{cases} \text{Max/min } f(x,y) = x + y \\ \text{s.v. } x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$.

Si tratta di un problema di ricerca di massimi e minimi sotto vincoli di uguaglianza.
La funzione obiettivo del problema è una funzione continua, il vincolo definisce una regione $\mathcal{E}$ che è un insieme compatto (ellisse), e quindi per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette valore massimo e valore minimo.

Formiamo la funzione lagrangiana:
$\Lambda(x,y,\lambda) = x + y - \lambda\left(x^2 + 4y^2 - 1\right)$.
Applicando le condizioni del primo ordine abbiamo:

$$\begin{cases} \Lambda'_x = 1 - 2\lambda x = 0 \\ \Lambda'_y = 1 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda'_x = x = \frac{1}{2\lambda} \\ \Lambda'_y = y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{1}{4\lambda^2} + 4\,\frac{1}{64\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda'_x = x = \frac{1}{2\lambda} \\ \Lambda'_y = y = \frac{1}{8\lambda} \\ \frac{5}{16\lambda^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Lambda'_x = x = \frac{1}{2\lambda} \\ \Lambda'_y = y = \frac{1}{8\lambda} \\ \lambda^2 = \frac{5}{16} \end{cases}.$$

Abbiamo quindi due sole soluzioni: $\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = \dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$ e $\begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ y = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}} \\ \lambda = -\dfrac{\sqrt{5}}{4} \end{cases}$.

Palesemente il punto $P_1 : \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ con $f\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ sarà punto di massimo assoluto, il punto $P_2 : \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ con $f\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}$, sarà punto di minimo assoluto.

II M 2) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

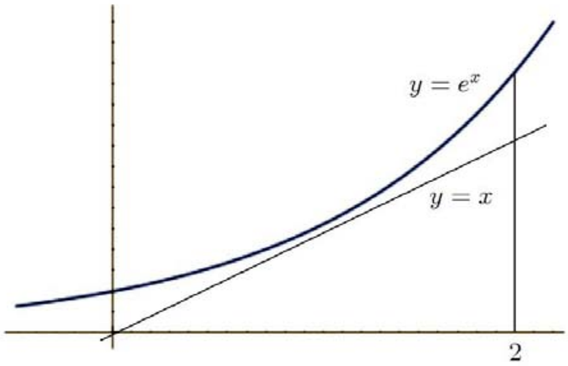
Si tratta di una equazione differenziale a variabili separabili, per cui avremo:
$y' = 2xy \Rightarrow \frac{1}{y}\, y' = 2x$ avendo posto $y \neq 0$ Sostituendo nell'equazione, vediamo che la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione. Passando all'integrazione avremo:
$\int \frac{1}{y}\, y' \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = \int 2x\, \mathrm{d}x + k \Rightarrow \log y = x^2 + k \Rightarrow y = e^{x^2+k} = m\, e^{x^2}$ avendo posto $m = e^k$. Dalla condizione $y(0) = 1$ otteniamo $m = 1 = e^k$ da cui $k = 0$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy $y = e^{x^2}$.

II M 3) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$.

Risolviamo anzitutto l'equazione omogenea. Da $y'' - 3y' + 2y = 0$ otteniamo:
$\left(D^2 - 3D + 2\right)(y) = (D-1)(D-2) = 0$ ovvero $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ e quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea sarà: $y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x}$.
Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, ipotizziamo una soluzione particolare del tipo $y_0(x) = ax + b$ per cui avremo $y_0' = a$ e $y_0'' = 0$, da cui sostituendo nella $y'' - 3y' + 2y$ otteniamo:
$0 - 3a + 2ax + 2b = 2ax + 2b - 3a = 2x$ ovvero :
$\begin{cases} 2a = 2 \\ 2b - 3a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{3}{2}\, a = \frac{3}{2} \end{cases}$ e quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea sarà $y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + x + \frac{3}{2}$.
Sarà poi, da $\begin{cases} y = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x} + x + \frac{3}{2} \\ y' = c_1\, e^x + 2c_2\, e^{2x} + 1 \end{cases}$, imponendo le condizioni:
$\begin{cases} y(0) = c_1 + c_2 + \frac{3}{2} = 1 \\ y'(0) = c_1 + 2c_2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{1}{2} \\ -c_2 - \frac{1}{2} + 2c_2 + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -c_2 - \frac{1}{2} \\ c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$
$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$ e quindi avremo la soluzione particolare del problema di Cauchy che sarà $y(x) = e^x - \frac{3}{2}\, e^{2x} + x + \frac{3}{2}$.

II M 4) Data $f(x, y) = 2xy$ e data la regione $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq e^x\}$, calcolare $\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

Vista la regione di integrazione:



$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq e^x\}$ avremo:

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_x^{e^x} 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\big(y^2\,\Big|_x^{e^x}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,e^{2x} - x^3\,\mathrm{d}x\,.$$

Integrando per parti: $\displaystyle\int x\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,e^{2x} - \int \frac{1}{2}\,e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x}$ e quindi:

$\displaystyle\int_0^2 x\,e^{2x} - x^3\,\mathrm{d}x = \Big(\frac{1}{2}\,x\,e^{2x} - \frac{1}{4}\,e^{2x} - \frac{x^4}{4}\,\Big|_0^2 = \Big(e^4 - \frac{1}{4}\,e^4 - 4\Big) - \Big(0 - \frac{1}{4} - 0\Big)$ da cui:

$$\int_0^2 \int_x^{e^x} 2xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}\,e^4 - \frac{15}{4}\,.$$